



Istituzioni di Geometria
Dalle lezioni del prof. Bruno Martelli
Anno accademico 2023 – 24

Indice

Introduzione	v
1 Preliminari algebrici	1
1.1 Algebra tensoriale	1
1.1.1 Prodotto tensoriale	2
1.1.2 Tensori	4
1.1.3 Algebra tensoriale	6
1.1.4 Contrazioni	8
1.2 Algebra omologica	9
1.2.1 Successioni di spazi vettoriali	9
1.2.2 Successioni di complessi	10
2 Topologia differenziale	13
2.1 Varietà differenziabili	13
2.1.1 Partizione dell'unità	17
2.1.2 Spazio Tangente	22
2.1.3 Orientazione	24
2.2 Sottovarietà	29
2.2.1 Immersione ed embedding	30
2.2.2 Teoremi di Whitney	33
2.3 Fibrati	37
2.3.1 Manipolazioni	39
2.4 Campi Vettoriali	45
2.4.1 Flusso	46
2.4.2 Isotopia e Isotopia ambiente	47
2.4.3 Parentesi di Lie	51
2.5 Gruppi di Lie	55
2.5.1 Foliazioni e Distribuzioni	59
2.5.2 Mappa esponenziale	64
2.6 Ultime cose	66
2.6.1 Intorno tubolare	66
2.6.2 Somma connessa	71
3 Forme differenziali e Coomologia di De Rham	73
3.1 Varietà con bordo	73
3.2 Forme differenziali	76
3.2.1 Integrale	78
3.2.2 Forma volume	80
3.2.3 Differenziale	81
3.2.4 Il Teorema di Stokes	83
3.2.5 Derivata di Lie e contrazioni	86

3.2.6	Applicazioni alla relatività	88
3.3	Coomologia di De Rham	91
3.3.1	Il lemma di Poincaré	94
3.3.2	Il teorema di Mayer-Vietoris	96
3.3.3	Coomologia a supporto compatto	99
3.3.4	Dualità di Poincaré	103
3.3.5	Formula di Kunneth	106
3.4	Gruppi di omotopia superiore	107
4	Geometria differenziale	109
4.1	Varietà Pseudo-Riemanniane	109
4.1.1	Varietà Lorentziane	109
4.1.2	Lo spazio iperbolico	112
4.1.3	Varietà Riemanniane come spazi metrici	114
4.2	Connessioni	116
4.2.1	Trasporto parallelo	119
4.2.2	Torsione	120
4.2.3	Connessione di Levi-Civita	122
4.3	Geodetiche	125
4.3.1	Flusso geodetico	127
4.3.2	Mappa esponenziale	128
4.3.3	Completezza e Teorema di Hopf-Rinow	132
4.3.4	Isometrie	134
4.4	Curvatura	135
4.4.1	Tensore di Riemann	135
4.4.2	Olonomia	140
4.4.3	Derivata covariante di un campo tensoriale	141
4.4.4	Curvatura sezionale	141
4.4.5	Tensore di Ricci e curvatura scalare	143
4.4.6	Equazione di campo di Einstein	145
5	Risoluzione di alcuni esercizi	147
5.1	Prima consegna	147
5.2	Seconda consegna	152
5.3	Terza consegna	156
5.4	Quarta consegna	163

Introduzione

Le seguenti dispense nascono come una mia personale (e in nessun modo ufficiale) rielaborazione delle lezioni del corso di Istituzioni di Geometria tenute dal professor Bruno Martelli nell'anno accademico 2023-2024. Essendo una rielaborazione personale, potrebbero contenere molti errori, e potrebbero essere anche incomplete.

Quello di cui trattano è quindi l'introduzione (o meglio il proseguimento, riferito al corso di Geometria e Topologia differenziale tenuto dal professor Paolo Lisca) alla Topologia e Geometria differenziale.

Nel primo capitolo ho deciso di mettere una breve ricapitolazione dei principali risultati algebrici che vengono usati, ma sono comunque cose che vengono trattate più approfonditamente in un qualsiasi corso di algebra.

Il secondo capitolo, che è anche quello più sostanzioso, riguarda la Topologia differenziale. Vengono introdotti quelli che sono gli oggetti principali del nostro studio, ovvero le varietà differenziabili, assieme ad altre utili definizioni come quelle di spazio tangente e di sottovarietà. Vengono anche introdotti alcuni strumenti essenziali e che verranno continuamente usati, quali le partizioni dell'unità e i fibrati vettoriali. In particolare, i fibrati vettoriali saranno uno degli strumenti di maggiore importanza, in quanto sono legati ai campi tensoriali (sezioni di determinati fibrati vettoriali): oggetti quali i campi vettoriali, i tensori metrici o le forme differenziali non sono altro che campi tensoriali. Questi strumenti ci aiuteranno poi nel parlare di gruppi di Lie, di distribuzioni e di foliazioni. Concluderemo il capitolo parlando di intorni tubolari e di somma connessa di varietà.

Il terzo capitolo riguarda le forme differenziali e la coomologia di De Rahm. Nella prima parte parleremo appunto di forme differenziali: definiremo l'integrale e il differenziale di una forma, e vedremo come queste due operazioni sono collegate tra di loro (Teorema di Stokes). Nella seconda sezione, definiremo la coomologia di De Rahm, e dimostreremo alcuni risultati come il Lemma o la Dualità di Poincaré. Come ultima appendice, daremo un'occhiata veloce anche a cosa accade ai gruppi di omotopia superiore.

Nel quarto capitolo inizieremo a parlare veramente di Geometria differenziale, iniziando con il vedere come una varietà Riemanniana qualsiasi è dotata anche di una struttura di spazio metrico (che dipende dal tensore metrico scelto). Introduciamo le connessioni (vedremo il loro rapporto con i tensori metrici) e parleremo di geodetiche (che ci aiuteranno a capire quando una varietà è completa come spazio metrico). L'ultimo argomento che affronteremo è la curvatura di una varietà Riemanniana (e anch'essa dipende dal tensore metrico scelto), e quindi il tensore di Riemann.

Nel quinto (ed ultimo) capitolo, vi sono le mie soluzioni ad alcuni degli esercizi che sono stati lasciati nelle consegne durante il semestre. Essendo soluzioni personali, non sono precisissime (e potrebbero anche essere sbagliate).

Durante tutte queste dispense mi sono impegnato ad inserire disegni il più "densamente possibile" (realizzati per la maggior parte a mano), per cercare di rendere il più chiaro possibile ciò di cui si sta parlando. Inoltre ho inserito (nel terzo e nel quarto capitolo) una breve parentesi fisica, in quanto sono convinto che sia utile vedere un'applicazione "reale" di quello che si sta studiando.

Fatte le dovute premesse, spero che questo lavoro sia venuto in una maniera "decente" e che non sia troppo pesante. Per un qualsiasi tipo di feed-back, che siano errori di scrittura, dimostrazioni concettualmente sbagliate o mancanza di approfondimenti, non esitate a contattarmi all'indirizzo mail *p.crovetto@studenti.unipi.it*. Buona lettura.

Capitolo 1

Preliminari algebrici

Questo è un capitolo di introduzione, nel quale tratteremo i risultati algebrici che possono tornare utili nel seguito, tra i quali l'algebra multilineare, l'algebra tensoriale, l'algebra omologica ecc. Verranno comunque dati per buoni i risultati che di solito si vedono al corso di Geometria 1.

1.1 Algebra tensoriale

Avremo molto a che fare con spazi vettoriali reali di dimensione finita (e qualche volta anche infinita). Dati due spazi vettoriali V e W , indicheremo con $\text{Hom}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari da V in W , e con $\text{End}(V, V)$ l'insieme degli endomorfismi di V (cioè mappe lineari da V in sé stesso). In particolare, uno spazio di fondamentale importanza sarà il duale, cioè

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}),$$

i cui elementi si dicono anche *funzionali* o *covettori*. Se V è di dimensione finita, allora V e V^* sono isomorfi, ma l'isomorfismo tra di essi non è canonico e dipende dalla scelta di una base su V . Infatti, una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ induce una base duale $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ definita come

$$v^i(v_j) = \delta_{ij};$$

l'isomorfismo tra V e V^* sarà quindi costruito mandando v_i in v^i ed estendendo per linearità. D'altra parte, definendo il biduale di V come

$$V^{**} = (V^*)^*,$$

cioè come il duale del duale, allora esiste un isomorfismo canonico tra V e V^{**} dato da

$$v \mapsto (w \mapsto w^*(v)).$$

Si noti che nel caso infinito dimensionale tale mappa sarebbe solo iniettiva, ma non è detto che sia surgettiva. Per questo motivo, il biduale non avrà mai un "ruolo attivo", in quanto verrà sempre sostituito da V . Infatti, è utile pensare a V e V^* come relazionati dall'accoppiamento bilineare

$$V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad (v, w^*) \longmapsto w^*(v).$$

Vorremo generalizzare questa relazione, e vedere cosa succede quanto ci sono più spazi vettoriali in gioco.

Definizione 1.1 - Mappa multilineare

Dati $V_1, \dots, V_n, W$ spazi vettoriali, una mappa

$$F : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

si dice multilineare se è lineare in ogni componente.

Fissiamo $\mathcal{B}_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}\}$ base di V_i e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W . Come per le applicazioni lineari, possiamo scrivere F multilineare in coordinate rispetto a queste basi, e indicare con

$$F_{j_1 \dots j_n}^j$$

il numero per cui vale che

$$F(v_{1,j_1}, \dots, v_{n,j_n}) = \sum_{j=1}^n F_{j_1 \dots j_n}^j w_j.$$

Si osservi che, come per le applicazioni lineari, F è univocamente determinata dai suoi $F_{j_1 \dots j_n}^j$, ed una qualsiasi scelta di tali coefficienti identifica una e una sola F multilineare.

Definizione 1.2

Indichiamo con $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$ l'insieme delle applicazioni multilineari da $V_1 \times \dots \times V_n$ in W .

Quando $W = \mathbb{R}$, indichiamo con $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n)$ l'insieme $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; \mathbb{R})$.

Vale che

$$\dim(\text{Mult}(V_1, \dots, V_n)) = \dim(V_1) \dots \dim(V_n).$$

1.1.1 Prodotto tensoriale

Ricordiamo che la somma diretta di spazi vettoriali è definita come il prodotto cartesiano degli spazi, e in cui l'operazione di somma è quella di somma dei singoli spazi fatta componente per componente. Cioè

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_n = \{(v_1, \dots, v_n) : v_i \in V_i\}.$$

Definizione 1.3 - Prodotto tensoriale

Il prodotto tensoriale degli spazi $V_1, \dots, V_n$ è definito come

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n := \text{Mult}(V_1^*, \dots, V_n^*).$$

Dati $v_i \in V_i$ vettori, essi determinano un elemento

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

dato dalla mappa

$$(w_1^*, \dots, w_n^*) \mapsto w_1^*(v_1) \dots w_n^*(v_n).$$

Al contrario della somma, è importante notare che non tutti gli elementi di $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ sono di questa forma; è vero però che, fissate delle basi $\mathcal{B}_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}\}$ di V_i , allora l'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes v_{n,j_n} : v_{i,j_i} \in \mathcal{B}_i\}$$

è una base per il prodotto tensoriale.

Teorema 1.4 - Proprietà universale del prodotto tensoriale

Dato Z spazio vettoriale reale, allora

$$\pi : V_1 \times \dots \times V_k \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_k \quad (v_1, \dots, v_k) \longmapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_k$$

è multilineare e induce

$$\text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k; Z) \longrightarrow \text{Mult}(V_1, \dots, V_k; Z) \quad f \longmapsto f \circ \pi$$

che è un isomorfismo.

La dimostrazione non viene affrontata, ma basta notare che la mappa è iniettiva e gli spazi hanno la stessa dimensione. Tale teorema, che di solito viene indicato con il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \cdots \times V_k & \xrightarrow{\pi} & V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \\ & \searrow f & \downarrow f \circ \pi \\ & & Z \end{array}$$

ci dice che una mappa multilineare da $V_1 \times \cdots \times V_k$ in Z può essere fattorizzata per il prodotto tensoriale. Inoltre, questa proprietà caratterizza univocamente il prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Possiamo costruire quindi isomorfismi canonici tra

$$V \otimes W \cong W \otimes V \quad (V \otimes W) \otimes Z \cong V \otimes (W \otimes Z)$$

$$V \otimes (W \oplus Z) \cong V \otimes W \oplus V \otimes Z \quad (V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)^* \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*.$$

Un'altra relazione molto utile è quella che abbiamo già visto per V e V^* , ovvero vale che

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W,$$

e in particolare ritroviamo che lo spazio degli endomorfismi di V è isomorfo a $V \otimes V^*$.

Per quanto riguarda gli spazi a dimensione infinita, il duale e il bidual sono definiti alla stessa maniera che in dimensione finita, ma stavolta non ci sono isomorfismi; quello che resta vero è che le mappe costruite prima (canonicamente per il bidual e scegliendo una base per il duale) danno un'iniezione di V all'interno di V^* e di V^{**} .

Definizione 1.5 - Prodotto diretto e somma diretta

Siano $\{V_i\}$ spazi vettoriali reali. Definiamo il prodotto diretto dei V_i come

$$\prod_i V_i = \{(v_1, v_2, \dots) : v_i \in V_i\}$$

l'insieme di tutte le successioni di elementi dei V_i . Invece, definiamo la somma diretta dei V_i come

$$\bigoplus_i V_i = \{(v_1, v_2, \dots) : v_i \in V_i \text{ e } v_i \neq 0 \text{ solo in un numero finito}\} \subset \prod_i V_i.$$

Quando abbiamo un numero finito di spazi vettoriali, il prodotto e la somma sono isomorfi tra di loro, mentre è ovvio che quando abbiamo un insieme di indici infinito non è così. Inoltre, è facile verificare che

$$\left(\bigoplus_i V_i \right)^* \cong \prod_i V_i^*.$$

Il prodotto tensoriale di spazi di dimensione arbitraria può essere definito come lo spazio vettoriale che soddisfa la proprietà universale: l'unicità è semplice da provare, mentre l'esistenza è più complicata. In questo caso, una definizione che funziona meglio è quella data come quoziente di uno spazio vettoriale molto più grosso, ovvero di

$$V \otimes W = F(V \times W) / \sim,$$

dove

- $F(S)$ è lo spazio vettoriale generato da S , ovvero lo spazio vettoriale astratto che ha come base S .
- $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da

$$(v_1, w) + (v_2, w) \sim (v_1 + v_2, w) \quad (v, w_1) + (v, w_2) \sim (v, w_1 + w_2) \quad (\lambda v, w) \sim (v, \lambda w).$$

indichiamo la classe di equivalenza di (v, w) con $v \otimes w$. Questa definizione, nel caso di dimensione finita, coincide con quanto detto sopra, ed estende tutte le buone proprietà al caso di dimensione infinita (soprattutto quella che una base di $V \otimes W$ è data dal prodotto tensoriale tra gli elementi di una base per V e una base per W). Si noti però che il prodotto tensoriale (in dimensione infinita) non è distributivo rispetto al prodotto diretto.

1.1.2 Tensori

Abbiamo quindi definito le operazioni di $\oplus$, $\otimes$ e di passaggio al duale, e ora vediamo come applicarle ad un singolo spazio vettoriale V .

Definizione 1.6 - Spazio tensoriale (h,k)

Siano h, k interi positivi, definiamo lo spazio tensoriale (h, k) come

$$\mathcal{T}_h^k(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_h \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_k = \text{Mult}(V^*, \dots, V^*, V^{**}, \dots, V^{**}; \mathbb{R}),$$

dove stiamo prendendo h copie di V e k copie di V^* .

In altre parole, $\mathcal{T}$ è una mappa multilineare

$$\mathcal{T} : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_h \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Esempi

$$\mathcal{T}_0^0(V) = \mathbb{R} \quad \mathcal{T}_1^0(V) = V \quad \mathcal{T}_0^1(V) = V^* \quad \mathcal{T}_1^1(V) = V \otimes V^* \cong \text{End}(V),$$

dove l'ultimo isomorfismo è indotto da

$$V \times V^* \longrightarrow \text{End}(V) \quad (v, w^*) \longmapsto (z \longmapsto w^*(z)v)$$

per proprietà universale. Altri esempi sono dati da

$$\mathcal{T}_0^2(V) = \text{Bil}(V) \quad \mathcal{T}_2^0(V) = \text{Bil}(V^*) \quad \mathcal{T}_1^k = \text{Mult}(V^*, V, \dots, V; \mathbb{R}) = \text{Mult}(V, \dots, V; V).$$

Esempi dove $h + k > 2$ sono i seguenti:

- in $V = \mathbb{R}^3$, il prodotto vettoriale è un tensore di tipo $(1, 2)$.
- in $V = \mathbb{R}^n$, il determinante è un tensore di tipo $(0, n)$.

Convenzione di Einstein

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}^*$ la sua base duale; una base per lo spazio tensoriale $\mathcal{T}_k^h(V)$ è dato da i vettori del tipo

$$v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k}$$

dove $1 \leq i_1, \dots, i_h, j_1, \dots, j_k \leq n$. Quindi, questo insieme contiene n^{h+k} elementi; possiamo quindi scrivere ogni tensore di tipo (h, k) come

$$T = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k}.$$

Si noti che non c'è il simbolo di sommatoria: questa notazione consiste nella *convenzione di Einstein*, cioè ogni indice che si ripete almeno due volte deve essere sommato sul valore dell'indice. Stiamo quindi sommando su tutti gli indici $i_1, \dots, i_h, j_1, \dots, j_k$.

Vediamo un esempio di come scrivere un tensore, e in particolare cerchiamo di scrivere le coordinate del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ rispetto ad una qualsiasi base ortonormale (si può anche scegliere la base canonica per avere più chiare le cose):

$$T_{jk}^i = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, j = k \text{ o } k = i \\ +1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ o } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3) \text{ o } (3, 2, 1) \end{cases}$$

La "matrice" tridimensionale ε_{ijk} viene chiamata simboli di Levi-Civita.

Coordinate e manipolazioni

La scrittura in coordinate e la convenzione di Einstein sono due utili strumenti che ci permettono di descrivere manipolazioni di tensori in maniera precisa. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ per V e consideriamo le coordinate rispetto a tale base. Perciò scriviamo un generico vettore v come v^i , dove

$$v = v^i v_i$$

(si noti che v^i sono dei numeri, mentre v_i sono vettori). Se v è un vettore e $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ (cioè un endomorfismo), allora scriviamo $w = T(v)$ in coordinate come

$$w^i = T_j^i v^j,$$

dove v^i , w^i e T_j^i sono le coordinate di v , w e T . Allo stesso modo, se v e w sono vettori e $g \in \mathcal{T}_0^2(V)$ (cioè è una forma bilineare) che ha coordinate g_{ij} , allora

$$g(v, w) = v^i g_{ij} w^j.$$

Questi due esempi appena fatti sono semplici generalizzazioni di quello che già sapevamo per applicazioni lineari e forme bilineari, dove stiamo solo applicando la convenzione di Einstein. Fare ciò, anche se può sembrare inutile, ci può aiutare a capire cosa accade nel caso generale. Guardiamo ad esempio il caso del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$; se $z = v \times w$ (o $v \wedge w$), allora in coordinate

$$z^i = T_{jk}^i v^j w^k.$$

Quello che notiamo è che quando usiamo la notazione di Einstein, gli indici che vogliamo sommare compaiono una volta in alto e una in basso, ed è un fatto generale: le notazioni sono fatte in modo da sommare su indici che compaiono una volta in alto e una in basso.

Cambio di base

Vediamo cosa succede alle coordinate dei tensori quando cambiamo base. Sia quindi $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ un'altra base di V , e A matrice di cambio di base in modo che

$$w_j = A_j^i v_i.$$

La matrice A è invertibile, e questo si riflette nel senso che esiste una matrice B per cui

$$A_k^i B_j^k = B_k^i A_j^k = \delta_j^i.$$

La base duale cambia come

$$w^i = B_i^j v^j;$$

verifichiamo questa formula mostrando che i w^i definiti ora sono effettivamente la base duale relativa ai w_i , cioè che

$$w^i(w_j) = (B_k^i v^k)(A_j^l v_l) = B_k^i A_j^l v^k(v_l) = B_k^i A_j^l \delta_l^k = B_k^i A_j^k = \delta_j^i.$$

Vediamo allora come cambiano le coordinate di un tensore T , dove abbiamo detto che possiamo scrivere T in coordinate come

$$T = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \dots \otimes v^{j_k}.$$

Teorema 1.7

Dati T , v_i e w_i come sopra, allora le coordinate di T rispetto alla base dei w_i cambiano come

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h} = B_{l_1}^{i_1} \dots B_{l_h}^{i_h} A_{j_1}^{m_1} \dots A_{j_k}^{m_k} T_{m_1 \dots m_k}^{l_1 \dots l_h}.$$

Concludiamo il nostro discorso sui tensori osservando che

$$\mathcal{T}_h^k(V) \otimes \mathcal{T}_m^n(V) = \mathcal{T}_{h+m}^{k+n}(V),$$

e in particolare dati due tensori $S \in \mathcal{T}_h^k(V)$ e $T \in \mathcal{T}_m^n(V)$ il loro prodotto è un elemento di $\mathcal{T}_{h+m}^{k+n}(V)$ con coordinate, rispetto a qualche base $\mathcal{B}$, date da

$$(S \otimes T)_{j_1 \dots j_k j_{k+1} \dots j_{k+n}}^{i_1 \dots i_h i_{h+1} \dots i_{h+m}} = S_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h} T_{j_{k+1} \dots j_{k+n}}^{i_{h+1} \dots i_{h+m}}.$$

1.1.3 Algebra tensoriale**Definizione 1.8**

Definiamo l'insieme $\mathcal{T}(V)$ come

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{h,k} \mathcal{T}_h^k(V).$$

L'insieme $\mathcal{T}(V)$ è un'algebra con il prodotto tensoriale. Possiamo comunque restringerci ad alcune sotto-algebre, tra le quali le più importanti sono

$$\mathcal{T}^*(V) = \bigoplus_k \mathcal{T}^k(V) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_*(V) = \bigoplus_h \mathcal{T}_h(V),$$

che possiamo chiamare algebra *controvariante* e *covariante*.

Definizione 1.9 - Tensori simmetrici e antisimmetrici

Diciamo che un tensore $T \in \mathcal{T}_k^0$ è simmetrico se

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = T(v_1, \dots, v_k) \quad \text{per ogni } \sigma \in \mathcal{S}_k.$$

Allo stesso modo, diciamo che T è antisimmetrico se

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) T(v_1, \dots, v_k) \quad \text{per ogni } \sigma \in \mathcal{S}_k.$$

Ad esempio, considerando g prodotto scalare è un tensore simmetrico di tipo $(0,2)$, mentre il determinante è un tensore antisimmetrico di tipo $(0,n)$. Inoltre, possiamo vedere se un tensore è simmetrico (rispettivamente antisimmetrico) in base alle sue coordinate: vale infatti che T è simmetrico (rispettivamente antisimmetrico) se e solo se

$$T_{i_1 \dots i_k} = T_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)} \quad \text{per ogni } \sigma \in \mathcal{S}_k$$

(rispettivamente con $\text{sgn}(\sigma)$). Possiamo anche fare in modo di trasformare un tensore qualsiasi in un tensore simmetrico o antisimmetrico.

Definizione 1.10 - Simmetrizzato e antisimmetrizzato

Sia $T \in \mathcal{T}_0^k(V)$ un tensore covariante. Il simmetrizzato di T è il tensore $S(T) \in \mathcal{T}_0^k(V)$ definito come

$$S(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

In maniera analoga, definiamo l'antisimmetrizzato di T , e lo denotiamo con $A(T)$, come

$$A(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Se T è simmetrico (rispettivamente antisimmetrico), allora $S(T) = T$ (rispettivamente $A(T) = T$). In coordinate, il simmetrizzato e l'antisimmetrizzato si scrivono come

$$S(T)_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} \quad A(T)_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}.$$

Indichiamo con $S^k(V)$ e con $\Lambda^k(V)$ gli insiemi di $\mathcal{T}_0^k(V)$ costituiti da tutti i vettori simmetrici e antisimmetrici, e quindi poniamo

$$S^*(V) = \bigoplus_k S^k(V) \quad \Lambda^*(V) = \bigoplus_k \Lambda^k(V).$$

Questi due oggetti sono dei sottospazi vettoriali di $\mathcal{T}^*(V)$, che però non sono sotto-algebre, in quanto non sono chiusi per prodotto tensoriale. Quello che vorremmo, e che ci piacerebbe, è che lo fossero. Per ovviare a questo problema, introduciamo due prodotti creati su misuri, cioè il prodotto simmetrico e il prodotto antisimmetrico.

Definizione 1.11 - Prodotto simmetrico e antisimmetrico

Dati $k_1, \dots, k_m$ interi positivi (anche diversi tra loro) e $T^i \in \mathcal{T}_0^{k_i}(V)$ tensori covarianti, definiamo il prodotto simmetrico di $T^1, \dots, T^m$ come

$$T^1 \odot \dots \odot T^m := \binom{k_1 + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_m} S(T^1 \otimes \dots \otimes T^m).$$

Analogamente, il prodotto antisimmetrico di $T^1, \dots, T^m$ è definito come

$$T^1 \wedge \dots \wedge T^m := \binom{k_1 + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_m} A(T^1 \otimes \dots \otimes T^m).$$

I due prodotti sono associativi, ma la cosa che li contraddistingue (e che rende il prodotto antisimmetrico molto più interessante da studiare) è il fatto che

$$v^* \odot w^* = w^* \odot v^* \quad v^* \wedge w^* = -w^* \wedge v^*.$$

In questo modo, il prodotto simmetrico rende l'insieme $S^*(V)$ una sotto-algebra commutativa di $\mathcal{T}^*(V)$, mentre il prodotto antisimmetrico (che da qui in avanti chiameremo prodotto wedge) rende l'insieme $\Lambda^*(V)$ una sotto-algebra anticommutativa di $\mathcal{T}^*(V)$.

Andiamo a studiare da più vicino queste due algebre. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V , e sappiamo già che l'insieme ottenuto da

$$\mathcal{D} = \{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

è una base per $\mathcal{T}_0^k(V)$, che ha quindi dimensione n^k . Per quanto riguarda $S^k(V)$ e $\Lambda^k(V)$ allora

- l'insieme

$$\{v_{i_1} \odot \dots \odot v_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

è una base di $S^k(V)$, che ha dimensione $\binom{n+k-1}{k-1}$.

- l'insieme

$$\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

è una base per $\Lambda^k(V)$, che ha dimensione $\binom{n}{k}$.

Corollario 1.12

$S^*(V)$ è uno spazio infinito dimensionale, mentre $\Lambda^*(V)$ ha dimensione $2^n < +\infty$ (e per questo ci piace tantissimo).

Un fatto molto importante è che

$$\dim(\Lambda^n) = 1.$$

Cioè, fissata $\{v^1, \dots, v^n\}$ una base per V^* , un generatore di $\Lambda^n(V)$ è dato da $v^1 \wedge \dots \wedge v^n$. Infatti, già sappiamo che esiste un'unica n -forma multilineare alternante su V a meno di riscalamento, e questo è proprio come viene definito il determinante: quando $V = \mathbb{R}^n$, abbiamo che

$$\det = e^1 \wedge \dots \wedge e^n,$$

dove $e^1, \dots, e^n$ è la base duale associata alla base canonica. Si noti però che, in generale, su V non c'è nessun generatore canonico, a meno di compiere qualche scelta, come quella di fissare una base. Vediamo allora come cambiano le n -forme alternanti associate a due basi diverse di V .

Proposizione 1.13

Se cambiamo la base, $\{w_1, \dots, w_n\}$ con $w^i = A_j^i v^j$, allora $w_1 \wedge \dots \wedge w_n = \det(A) v_1 \wedge \dots \wedge v_n$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} w^1 \wedge \dots \wedge w^n &= A_{j_1}^1 v^{j_1} \wedge A_{j_2}^2 v^{j_2} \wedge \dots \wedge A_{j_n}^n v^{j_n} = A_{j_1}^1 A_{j_2}^2 \dots A_{j_n}^n v^{j_1} \wedge \dots \wedge v^{j_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)}^1 \dots A_{\sigma(n)}^n v^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)}^1 \dots A_{\sigma(n)}^n \operatorname{sgn}(\sigma) v^1 \wedge \dots \wedge v^n = \\ &= v^1 \wedge \dots \wedge v^n \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)}^1 \dots A_{\sigma(n)}^n = \det(A) v^1 \wedge \dots \wedge v^n. \end{aligned}$$

□

1.1.4 Contrazioni

Dato lo spazio $\mathcal{T}_h^k(V)$ (con $h, k \geq 1$), scegliamo due indici $1 \leq i \leq h$ e $1 \leq j \leq k$ e di conseguenza la i -esima componente V e la j -esima componente V^* nel prodotto tensoriale che definisce $\mathcal{T}_h^k(V)$, e le "spostiamo in fondo". Abbiamo quindi un isomorfismo definito da

$$\mathcal{T}_h^k(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_h \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_k \xrightarrow{\sim} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h-1} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k-1} \otimes V \otimes V^*.$$

Definiamo la mappa di contrazione a somiglianza della mappa "traccia" che abbiamo nel caso delle matrici, cioè

$$C : V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad v \otimes w^* \longmapsto w^*(v).$$

In realtà quella che stiamo definendo è una mappa bilineare $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ che è bilineare, e per la proprietà universale del prodotto tensoriale essa definisce una mappa $V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Dall'isomorfismo $V \otimes V^* \cong \operatorname{End}(V)$ visto in precedenza, la mappa C risulta essere proprio la traccia; componendo con la mappa sopra,

$$\mathcal{T}_h^k(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_h \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_k \xrightarrow{\sim} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h-1} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k-1} \otimes \mathbb{R} \cong \mathcal{T}_{h-1}^{k-1}(V),$$

o meglio, abbiamo

$$\mathcal{T}_h^k(V) \xrightarrow{id \otimes C} \mathcal{T}_{h-1}^{k-1}(V) \otimes \mathbb{R} \cong \mathcal{T}_{h-1}^{k-1}(V).$$

La mappa di contrazione induce quindi una mappa (che indicheremo sempre con C) data da

$$C : \mathcal{T}_h^k(V) \cong \mathcal{T}_{h-1}^{k-1}(V) \otimes V \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{T}_{h-1}^{k-1}(V) \quad a \otimes b \otimes c \longmapsto c(b)a.$$

1.2 Algebra omologica

Passiamo ora a parlare di quella che è l'algebra omologica, ovvero quel settore dell'algebra che si occupa di moduli su anelli, di successioni esatte e di omologia/coomologia di successioni lunghe. Quello che ci interesserà maggiormente sarà il caso in cui l'anello su cui lavoriamo è il campo dei numeri reali, e i moduli in questione saranno in realtà spazi vettoriali reali, e parleremo solo di coomologia (in quanto tratteremo in seguito la coomologia di Poincaré). Questo ci semplificherà molto la trattazione.

1.2.1 Successioni di spazi vettoriali

L'oggetto principale del nostro studio saranno i complessi di co-catene di spazi vettoriali, cioè

Definizione 1.14 - Complessi di co-catene

Un complesso di co-catene è una successione di spazi vettoriali

$$C_0 \xrightarrow{d^0} C_1 \xrightarrow{d^1} C_2 \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} C_n \xrightarrow{d^n} \dots$$

dove i C_i sono spazi vettoriali e i d^i sono applicazioni lineari tali che $d^i \circ d^{i-1} = 0$.

Dato un complesso di co-catene $C = \{C_i\}$, per ogni i indichiamo

$$Z^i(C) := \text{Ker}(d^i) \quad \text{i co-cicli}$$

$$B^i(C) := \text{Imm}(d^{i-1}) \quad \text{i co-bordi.}$$

Ovviamente, per la proprietà data da $d^i \circ d^{i-1} = 0$, vi è un'inclusione data da $B^i(C) \subset Z^i(C)$.

Definizione 1.15 - Successione esatta

Diciamo che una successione è esatta quando $B^i(C) = Z^i(C)$.

Una successione esatta corta è una successione esatta fatta come

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

Esempi:

•

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow \dots$$

è esatta se e solo se f è iniettiva.

•

$$\dots \longrightarrow V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

è esatta se e solo se g è surgettiva.

•

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$$

è esatta se e solo se f è un isomorfismo.

Quando abbiamo un complesso di cocatene qualsiasi, sarà utile capire quanto tale complesso sia "non esatto", cioè ci risulterà utile dare la seguente

Definizione 1.16 - Coomologia di un complesso

Definiamo l' i -esimo gruppo di coomologia del complesso C come

$$\mathcal{H}^i(C) := \frac{Z^i(C)}{B^i(C)}.$$

1.2.2 Successioni di complessi

Come per gli spazi vettoriali, si può parlare anche di successioni di complessi di co-catene. Per prima cosa, introduciamo quelli che sono i morfismi di complessi, per poi parlare di omotopie tra complessi.

Definizione 1.17 - Morfismo di co-catene

Un morfismo di complessi di co-catene è un insieme $\varphi = \{\varphi^i\}_{i \in I}$ tale che i quadrati del seguente diagramma commutano

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_3 \longrightarrow \dots \\ \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \downarrow \varphi^3 \\ D_0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & D_3 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Osservazione

f morfismo di catene induce $f_* : \mathcal{H}^i(C) \longrightarrow \mathcal{H}^i(D)$ in modo covariante.

Definizione 1.18 - Omotopia di morfismi di complessi

Un'omotopia tra due morfismi di complessi di co-catene $f, g : C \longrightarrow D$ è una mappa $h = \{h^i\}$, dove $h^i : C_{i+1} \longrightarrow D_i$, e tale che

$$f - g = hd + dh.$$

Abbiamo dunque uno schema del genere:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_3 \longrightarrow \dots \\ g \downarrow \downarrow f & & g \downarrow \downarrow f & & g \downarrow \downarrow f & & g \downarrow \downarrow f \\ D_0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & D_3 \longrightarrow \dots \end{array}$$

(red arrows h^0, h^1, h^2, h^3 from C_{i+1} to D_i)

Lemma 1.19

Se f e g sono morfismi di catene omotopi, allora inducono la stessa mappa in coomologia.

Dimostrazione. Data $[\alpha] \in \mathcal{H}^i(c)$, devo far vedere che $(f_* - g_*)([\alpha]) = 0$. Ma questo segue da

$$(f_* - g_*)([\alpha]) = [hd\alpha] + [dh\alpha] = 0.$$

Infatti il primo addendo è uguale a zero, in quanto α è un co-ciclo, e quindi $d\alpha = 0$. Il secondo invece è la classe di un co-bordo ($d(h\alpha)$) ed è quindi nullo in coomologia. $\square$

Definizione 1.20 - Successione esatta di corta di complessi

Una successione esatta corta di complessi di co-catene è un diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{i-1} & \xrightarrow{f^{i-1}} & D_{i-1} & \xrightarrow{g^{i-1}} & E_{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_i & \xrightarrow{f^i} & D_i & \xrightarrow{g^i} & E_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & D_{i+1} & \xrightarrow{g^{i+1}} & E_{i+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

dove le righe sono esatte e ogni quadrato commuta.

Se $\mathcal{C} = \{C_i\}$, $\mathcal{D} = \{D_i\}$ e $\mathcal{E} = \{E_i\}$ sono i vari complessi di co-catene, allora possiamo indicare la successione corta di questi complessi come

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \xrightarrow{g} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

dove $f = \{f^i\}$ e $g = \{g^i\}$.

Vediamo ora uno dei risultati (algebrici) più importanti del corso. Data una successione di esatta corta di complessi di co-catene, vorremmo mettere in relazione l'esistenza di questa successione esatta con le coomologie dei complessi considerati.

Teorema 1.21 - Lemma del serpente

Una successione esatta corta di complessi di co-catene induce una successione esatta lunga in co-omologia come segue:

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{C}) \xrightarrow{f_*} \mathcal{H}^i(\mathcal{D}) \xrightarrow{g_*} \mathcal{H}^i(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^{i+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \dots$$

dove δ viene detto omomorfismo di connessione.

La dimostrazione non è stata data, però si tratta comunque di una dimostrazione per "diagram-chasing"; l'unica parte difficile è dimostrare che δ è ben definita, e poi si tratta solo di un sacco di verifiche riguardo all'esattezza della successione in coomologia.

Topologia differenziale

In questo capitolo introduciamo l'oggetto principale del nostro studio: le varietà differenziabili. Dopo aver dato la definizione, passeremo a parlare di spazi tangente, orientazione e sottovarietà. Nella seconda parte, introdurremo i campi vettoriali, un oggetto molto utile, e infine parleremo dei gruppi di Lie.

2.1 Varietà differenziabili

Prima di parlare di varietà differenziabili, richiamiamo la definizione di varietà topologica.

Definizione 2.1 - Varietà topologica

Una varietà topologica è uno spazio topologico X tale che

- X è Hausdorff e a base numerabile;
- X è localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, cioè $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto di x che indicheremo con $U(x)$, ed una mappa $\phi : U(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ che è un omeomorfismo.

La definizione 2.1 è quella che viene data a Geometria 2. Vi è una differenza sostanziale con quella che di solito viene data al corso di Geometria e Topologia Differenziale: mentre nella definizione 2.1 si parla di uno spazio topologico astratto, a GTD una varietà viene definita come un particolare sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$.

Le due definizioni sono diverse, ed hanno ognuna i propri svantaggi e vantaggi. Il vantaggio della definizione che abbiamo dato è che stiamo parlando di uno spazio topologico astratto, che dunque non ha bisogno di essere immerso in nessun $\mathbb{R}^m$ (e in effetti non c'è alcuna ragione che lo sia). Allo stesso tempo, l'astrazione così elevata non ci permette in alcuna maniera di fare Analisi sulle varietà descritte prima, ed è quindi impossibile definire anche i più semplici concetti di base, come ad esempio spazio tangente ecc.

Le ipotesi Hausdorff e a base numerabile, sebbene sembrino superflue, sono necessarie; infatti si possono costruire spazi topologici (che vogliamo evitare di includere nella definizione di varietà) che sono localmente omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$, ma che non rispettano le altre condizioni:

- la Retta con due origini è uno spazio che non è Hausdorff, ma è localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}$ ed è a base numerabile;
- viceversa, un'unione disgiunta più che numerabile di copie di $\mathbb{R}^n$ è uno spazio Hausdorff (e localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$) che non è a base numerabile;
- si potrebbe pensare, visto il controesempio precedente, che con l'ipotesi di connessione allora si possa ovviare alla richiesta della numerabilità della base. Un controesempio a tale ipotesi è dato dalla "Retta Lunga".

Definizione 2.2 - Carte e Atlante

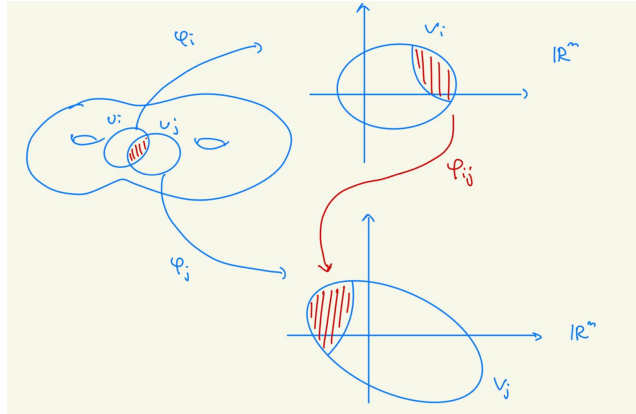
Sia X una varietà topologica. Una carta per X è un omeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$, dove $U \subset X$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ sono aperti.

Un atlante per X è un insieme di carte $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow V_i\}_{i \in I}$ tali che $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Date due carte qualsiasi, non ha senso chiedersi se esse sono differenziabili o meno (in quanto il dominio è, come detto prima, uno spazio astratto su cui non è possibile fare analisi). Nonostante ciò, prese due carte ϕ_i e ϕ_j (nel caso in cui $U_i \cap U_j \neq \emptyset$), ha senso parlare della differenziabilità della mappa $\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}$, in quanto è una mappa tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Possiamo perciò dare la seguente

Definizione 2.3 - Atlante Liscio

Un Atlante si dice liscio se $\forall i, j$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la mappa $\phi_{ij} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ è liscia (ovvero è di classe C^∞).



Possiamo quindi finalmente parlare di varietà differenziabili o, come le chiameremo d'ora in avanti, lisce.

Definizione 2.4 - Varietà liscia

Una varietà si dice liscia quando è dotata di un atlante liscio. Possiamo quindi pensare ad una varietà M come una coppia $(X, \mathcal{A})$, dove X è uno spazio topologico e $\mathcal{A}$ è un atlante.

Definizione 2.5 - Compatibilità e struttura liscia

Due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ su X si dicono compatibili se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un atlante liscio su X .

Una struttura liscia su M è una classe di equivalenza di atlanti lisci per la relazione di compatibilità.

Esempi di Varietà sono i seguenti:

- $U \subset \mathbb{R}^n$ con l'atlante dato da $\{id_U : U \longrightarrow U\}$. Esso è un atlante liscio, in quanto c'è solo una mappa;
- più in generale se M è una varietà topologica e $U \subset M$ è un suo aperto, allora anche U è una varietà topologica. Detto $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow V_i\}$, allora l'atlante corrispondente ad U è dato da $\mathcal{A}_U := \{\phi_i|_U : U \cap U_i \longrightarrow \phi_i(U \cap U_i)\}$;

Consideriamo $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$; vogliamo dimostrare che S^n è una varietà, dandone un opportuno atlante. Consideriamo $U_i^+ := \{x \in S^n : x_i > 0\}$ e $U_i^- := \{x \in S^n : x_i < 0\}$, e definiamo

$$\phi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow V \quad \phi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}),$$

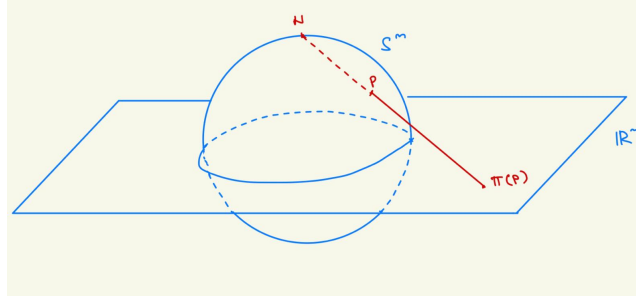
dove $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. L'insieme definito da $\mathcal{A} = \{\phi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow V\}$ è un atlante per S^n , ed in particolare è liscio. Infatti, le mappe di transizione sono date da $\phi_j^\pm \circ (\phi_i^\pm)^{-1}$ sono lisce in quanto composizione di mappe lisce (stiamo usando il fatto che $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Abbiamo definito un atlante per S^n , ma non è l'unico. Si consideri il polo Nord $N := (0, \dots, 0, 1)$ e la proiezione stereografica

$$\pi : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \{x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{R}^n \quad \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

Essa è un omeomorfismo tra l'aperto $U = S^n \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}^n$, e si può fare analogamente per $V = S^n \setminus \{S\}$, dove $S = (0, \dots, 0, -1)$ è il polo Sud. Le due carte così definite (chiamiamole ϕ^+ e ϕ^-) formano un atlante per S^n , che è liscio, in quanto l'unica funzione di transizione è data da $\phi^+ \circ (\phi^-)^{-1}$, che è liscia in quanto composizione di funzioni lisce.

I due atlanti definiti sono compatibili (basta verificare che le mappe di transizione sono lisce, sempre perchè composizioni di mappe lisce).



La proiezione stereografica

Definizione 2.6 - Atlante massimale

Data una varietà $M = (X, \mathcal{A})$, definiamo l'atlante massimale come l'unione di tutti gli atlanti compatibili con $\mathcal{A}$.

Possiamo dare una definizione alternativa di struttura liscia su una varietà X , ovvero come la coppia $(X, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ atlante massimale. Si noti che, fissato un atlante $\mathcal{A}$, è ben definito il suo atlante massimale, mentre un qualsiasi atlante si dice massimale se coincide con il suo atlante massimale.

Definizione 2.7 - Piano proiettivo reale

Il piano proiettivo reale è definito come $\mathbb{P}^n \mathbb{R} := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, dove $v \sim w$ se e solo se $w = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Da Geometria 2 sappiamo che $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è connesso e compatto, e vogliamo dimostrare che è una varietà n -dimensionale. Per $i = 1, \dots, n+1$ definiamo $U_i = \{x = [x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n \mathbb{R} : x_i \neq 0\}$ (per la definizione del proiettivo, U_i è un insieme ben definito) e

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad [x_1 : \dots : x_{n+1}] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right),$$

$$\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_{n+1}].$$

Le ϕ_i sono delle carte (sono continue e invertibili, con inversa continua), e quindi $\mathcal{A} = \{\phi_i\}_{i \in I}$ è un atlante. Vogliamo verificare che è anche liscio, ma per farlo non possiamo appellarci al fatto che $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sia composizione di mappe lisce, in quanto $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è uno spazio topologico astratto. Verifichiamolo per $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ (il resto delle verifiche sono analoghe):

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto [1 : y_1 : \dots : y_n] \mapsto \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1} \right)$$

che è liscia, dato che il dominio era $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \{y_1 \neq 0\}$.

La topologia di $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è la topologia quoziente, ma in generale si può definire un atlante (per un insieme X) anche se X non è uno spazio topologico.

Definizione 2.8

Dato X insieme qualunque, un atlante liscio per X è un insieme $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i \text{ biunivoche}\}$, con $U_i \subset X$ sottoinsieme e $V_i \subset \mathbb{R}^n$ aperto, tale che

- $X = \bigcup_i U_i$;
- $\forall i, j$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$, chiedo che sia dominio che codominio siano aperti e ϕ_{ij} sia un diffeomorfismo.

Definizione 2.9 - No Prior Topology

Dato X insieme e $\mathcal{A}$ atlante liscio per X , allora possiamo definire la *No Prior Topology* su X nella maniera seguente:

$$U \subset X \text{ è aperto} \iff \phi_i(U \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n \text{ è aperto.}$$

Nel caso in cui la No Prior Topology su X sia Hausdorff e a base numerabile, allora X è una varietà topologica con atlante $\mathcal{A}$.

Definizione 2.10 - Grassmaniana

Dato V spazio vettoriale reale di dimensione n , definiamo la Grassmaniana di k -spazi di V come $Gr_k(V) := \{W \subset V : W \text{ è un } k\text{-spazio vettoriale di } V\}$.

Segue subito dalla definizione che

$$Gr_0(V) = \{0\} \quad Gr_n(V) = \{V\} \quad Gr_1(V) = \mathbb{P}(V) \quad Gr_{n-1}(V) = \mathbb{P}(V^*)$$

dove V^* è il duale di V . Oltre a questi (che sono casi banali), come si comporta in generale $Gr_k(\mathbb{R}^n)$?

Fissiamo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e cerchiamo di costruire una carta. Chiamiamo $W = Span(v_{k+1}, \dots, v_n)$ e definiamo $U_{\mathcal{B}} = \{Z \in Gr_k(V) : W \cap Z = \{0\}\}$, cioè la famiglia dei supplementari di W . Definiamo

$$\psi_{\mathcal{B}} : W^k = \underbrace{W \times \dots \times W}_k \rightarrow U_{\mathcal{B}} \quad (w_1, \dots, w_k) \mapsto Span(v_1 + w_1, \dots, v_k + w_k).$$

W è isomorfo a $\mathbb{R}^{n-k}$, quindi $\psi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^{(n-k)k} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$ è una carta (andrebbe verificato che è una bigezione).

Se non specificato, quando parleremo di una varietà M intenderemo sempre che è munita di un atlante massimale $\mathcal{A}$.

Definizione 2.11 - Funzioni lisce

Una funzione $f : M \rightarrow N$ continua tra varietà lisce si dice liscia se è liscia quanto letta in carta, cioè se $\forall p \in M$ esiste un intorno aperto U_p con una carta $\phi : U_p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ed esiste un intorno $W_{f(p)}$ con una carta $\psi : W_{f(p)} \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^m$ tali che:

- $f(U) \subset W$;
- $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow Z$ è liscia.

L'ipotesi che $f(U) \subset W$ in realtà non è molto restrittiva, in quanto possiamo sempre restringerci, data la continuità di f , ad un intorno del tipo $U \cap f^{-1}(W)$. Inoltre, l'esistenza delle due carte ϕ e ψ si estende ad un "∀": se f è liscia, allora prese qualsiasi altre due carte ϕ' e ψ' la composizione $F' = \psi' \circ f \circ \phi'^{-1}$ sarà anch'essa liscia. Cioè f sarà liscia se letta in una qualsiasi carta.

Esempi di funzioni lisce:

- $id : M \longrightarrow M$;
- $\iota : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'inclusione;
- $\alpha : S^n \longrightarrow S^n$ $x \longmapsto -x$ la mappa antipodale;
- $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ $x \longmapsto [x]$ il rivestimento.

Definizione 2.12 - Diffeomorfismo

Una funzione $f : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo se f è liscia, invertibile e con inversa liscia. Diciamo che M e N sono diffeomorfe se esiste un diffeomorfismo tra loro.

Un diffeomorfismo è in particolare un omeomorfismo.

Un esempio utilissimo di diffeomorfismo è il seguente: si consideri la palla

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} = B_1(0)$$

e vediamo che è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Si consideri

$$f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

che è un diffeomorfismo, con inversa

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n \quad x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}.$$

2.1.1 Partizione dell'unità

Definizione 2.13 - Atlante adeguato

Sia M una varietà liscia, un atlante per M $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ si dice adeguato se:

- $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento localmente finito di M , cioè $\forall p \in M \exists U_p$ intorno aperto di p che interseca solo un numero finito di U_i ;
- dette $W_i := \phi_i^{-1}(\mathbb{B}^n)$, allora $\{W_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di M .

Si noti che nella definizione 2.13 si richiede espressamente che le ϕ_i siano delle carte che parametrizzano U_i con tutto $\mathbb{R}^n$. Il nostro scopo è quello di dimostrare che per un qualunque ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$, allora esiste un raffinamento $\{V_i\}_{i \in I}$ e un atlante adeguato $\mathcal{A}$ adeguato (rispetto ai V_i).

Definizione 2.14 - Esaustione in compatti

Sia X uno spazio topologico, un'esautione in compatti di X è una successione $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ di compatti in X tale che $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ e $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$.

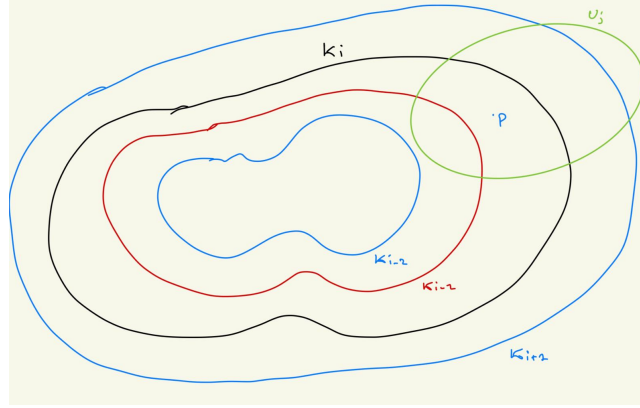
Esempio: $X = \mathbb{R}^n$ e $K_i = \overline{B_i(0)}$.

Un fatto/esercizio importante/interessante è il seguente: se X è "abbastanza buono" (cioè Hausdorff, a base numerabile e localmente compatto) allora ammette un'esautione in compatti. Una conseguenza immediata di tale fatto è che le varietà ammettono un'esautione in compatti.

Proposizione 2.15

Data M varietà liscia e un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$, allora esiste un atlante adeguato $\mathcal{A} = \{\phi_i : V_j \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ tale che $\{V_j\}$ raffina $\{U_i\}$, cioè $\forall j$ esiste un i tale che $V_j \subset U_i$.

Dimostrazione. Per quanto detto prima, esiste un'eshaustione di compatti $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$. Vogliamo costruire iterativamente le carte di $\mathcal{A}$.



Consideriamo $K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$, e in particolare $\forall p \in K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$ esiste un U_i che contiene p . Consideriamo la relativa carta

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

e prendiamo una palla di raggio ε centrata in $\phi_i(p)$. Considero

$$V_i := \phi_i^{-1}(B_\varepsilon(\phi_i(p))).$$

Per quanto detto precedentemente, sappiamo che una qualsiasi palla è diffeomorfa ad $\mathbb{R}^n$, per cui fissiamo un diffeomorfismo tra la palla $B_\varepsilon(\phi_i(p))$ e $\mathbb{R}^n$ (chiamiamolo $\psi_{i,\varepsilon}$) e consideriamo la composizione $\psi_{i,\varepsilon} \circ \phi_i$. Esso è un diffeomorfismo tra V_i e $\mathbb{R}^n$ (come richiesto per un atlante adeguato).

All'interno di $\mathbb{R}^n$ possiamo considerare la palla $\mathbb{B}^n$, quindi possiamo considerare

$$W_p = (\psi_{i,\varepsilon} \circ \phi_i)^{-1}(\mathbb{B}^n)$$

(la dipendenza da p è data dal fatto che $p \in U_i$ per qualche $i \in I$). Esso è un aperto per la continuità delle due mappe, e al variare di $p \in K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$ abbiamo un ricoprimento aperto; dato che $K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$ è un compatto, possiamo estrarne un sottoricoprimento finito, cioè trovare $\{p_1, \dots, p_k\} \subset K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$ per cui $\{W_{p_i}\}$ ricoprono $K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$.

Costruendo in questo modo i V_j , otteniamo un ricoprimento di tutto lo spazio (in quanto ricoprono ogni anello, e $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$). Inoltre i W_j ricoprono a loro volta lo spazio, per costruzione. Il ricoprimento è localmente poichè, prendendo un qualsiasi $p \in M$, p apparterrà a qualche anello di quelli creati sopra, e per ogni anello ho un numero finito di V_j che li intersecano. $\square$

Definizione 2.16 - Partizione dell'unità

M varietà liscia, $\{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto. Una partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}_{i \in I}$ è un insieme di funzioni $\{\rho_i : U_i \rightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$ tale che:

- ρ_i è liscia, a valori in $[0, 1]$ e con supporto contenuto in U_i ;
- "vicino ad ogni punto" sono quasi tutte nulle, cioè $\forall p \in M$ esiste U_p intorno aperto tale che $\rho_i|_{U_p} \equiv 0$ per tutti gli $i \in I$ tranne che in un numero finito;
- $\forall p \in M, \sum_{i \in I} \rho_i(p) = 1$.

Per la dimostrazione del prossimo teorema, è utile notare l'esistenza di funzioni che vengono dette "cut-off". Nel nostro caso, in particolare, ci sarà utile considerare la funzione data da

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Essa è una funzione liscia e a valori in $[0,1]$. In realtà, per la dimostrazione del teorema successivo, considereremo una sua parente, ovvero richiederemo una funzione $\lambda(x) \in C^\infty$ tale che

$$\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1] \quad \lambda(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| \leq 1 \\ 0 & \|x\| \geq 2 \end{cases}.$$

Teorema 2.17

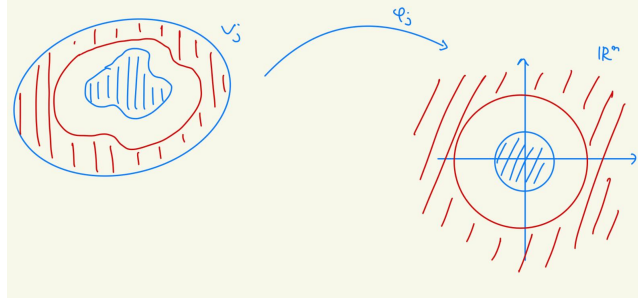
M varietà liscia, $\{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto, allora esiste una partizione dell'unità subordinata a U .

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente, sappiamo che esiste un raffinamento $\{V_j\}$ ed un atlante adeguato $\mathcal{A}$ per $\{V_j\}_{j \in J}$. Partiamo con il costruire una partizione dell'unità $\{\rho_j\}_{j \in J}$ subordinata a $\{V_j\}_{j \in J}$.

Sia λ una funzione costruita come prima, e $\forall j \in J$ definisco

$$\rho_j : V_j \longrightarrow \mathbb{R} \quad \rho_j := \lambda \circ \phi_j,$$

dove ϕ_j è la carta relativa a V_j . In particolare, $\text{supp}(\rho_j) \subset V_j$, e posso estendere ρ_j a tutta M ponendo $\rho_j(x) = 0$ se $x \notin V_j$.



Le ρ_j che abbiamo appena definito vanno quasi bene, nel senso seguente:

- ρ_j è liscia, a valori in $[0,1]$ e con supporto contenuto in V_j per costruzione;
- $\mathcal{A}$ è adeguato e quindi localmente finito. In particolare per ogni punto p esiste un intorno U_p tale che interseca solo un numero finito di V_j . Di conseguenza solo un numero finito di ρ_j sono diverse da zero (le ρ_j sono nulle al di fuori del proprio V_j);
- per ogni $p \in M$ scrivo

$$\rho(p) = \sum_{j \in J} \rho_j(p).$$

Per definizione, $\rho(p)$ è strettamente maggiore di zero: dalla proprietà di $\mathcal{A}$ di essere adeguato, sappiamo che esiste una carta ϕ_{j_0} tale che $\phi_{j_0}(p) \in \mathbb{B}^n$ (dalla proprietà che le controimmagini delle palle unitarie ricoprono M), e quindi $\rho_{j_0}(p) = 1$. Allora posso considerare

$$\bar{\rho}_j(p) := \frac{\rho_j(p)}{\rho(p)}.$$

Per tornare al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$, siccome $\{V_j\}_{j \in J}$ era un raffinamento degli U_i ci basta definire, per ogni i ,

$$\tilde{\rho}_i(p) := \sum_{j \in J(i)} \rho_j(p),$$

dove $J(i) := \{j \in J : V_j \subset U_i\}$. □

Come molti teoremi, il Teorema 2.17 è un teorema di esistenza; nella pratica, calcolare una partizione dell'unità è difficile e molte volte inutile. La sua utilità risiede nel fatto che alcuni risultati di esistenza locale si possono estendere a risultati di esistenza globale. Vediamo un paio di applicazioni.

Definizione 2.18 - Funzione liscia su un sottoinsieme qualsiasi

Siano M e N varietà lisce e sia $S \subset M$ un sottoinsieme qualunque di M (in questo caso S sta proprio per "schifezza"); $f : S \rightarrow N$ si dice liscia se $\forall p \in S \exists U_p$ intorno aperto di p (in M) ed $\exists f_p : U_p \rightarrow N$ liscia che estende f , cioè tale che $f_p(s) = f(s) \forall s \in S \cap U_p$.

La definizione di funzione liscia su (un qualsiasi sottoinsieme) S implica automaticamente che, localmente, si possa estendere ad una funzione liscia definita su un intorno di un punto in S . Quello che non è affatto ovvio (e non è in generale vero) è che si possa estendere ad una funzione liscia definita globalmente sulla varietà.

Nonostante ciò, grazie all'esistenza di una partizione dell'unità (cioè Teorema 2.17) possiamo dimostrare che, se la varietà d'arrivo è $\mathbb{R}^n$ e l'insieme S su cui è definita f è un chiuso, allora è possibile estendere f globalmente ad una funzione liscia F definita su tutta la varietà.

Proposizione 2.19

Sia M varietà liscia e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia, allora esiste $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia che estende f .

Dimostrazione. Sappiamo che per definizione di funzione liscia esistono f_p estensioni locali di f , ed in particolare $f_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considero allora il ricoprimento aperto dato da $\{U_p\}_{p \in S}$ e $M \setminus S$, e una partizione dell'unità subordinata $\{\rho_p\}_{p \in S} \cup \{\rho\}$ a tale ricoprimento.

Scrivo

$$F(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) f_p(x),$$

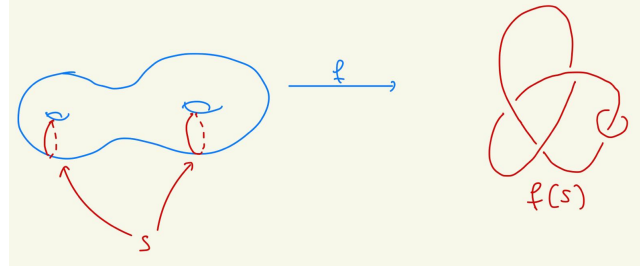
che è ben definita e liscia (in quanto somma finita di funzioni lisce; la finitezza della somma è data dal fatto che solo un numero finito di $\rho_p(x)$ sono non nulle). Si noti che le $f_p(x)$ in realtà non sarebbero definite su tutta M , ma siccome laddove non sono definite (cioè per $x \notin U_p$) allora $\rho_p(x) = 0$, allora possiamo ignorare tale fatto (formalmente possiamo estenderle a zero su tutta M ; ora queste funzioni non sono più lisce, non essendo neanche continue, ma rimangono comunque lisce in U_p , cioè dove effettivamente $\rho_p(x) \neq 0$).

La nostra tesi è mostrare che la F definita estende f . Se $x \in S$, allora

$$F(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) f_p(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) f(x) = f(x) \sum_{p \in S} \rho_p(x) = f(x).$$

La seconda uguaglianza è data dal fatto che per $x \in S$ allora $f_p(x) = f(x)$, mentre l'ultima segue dalla definizione di partizione dell'unità. □

In generale, possiamo avere casi molto strani: si consideri ad esempio il sottoinsieme S del disegno sotto, con $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un diffeomorfismo. Il fatto che tale f si possa estendere (per di più ad una funzione liscia) non è banalissimo.



Inoltre, per costruzione, si può richiedere che $F \equiv 0$ al di fuori di un intorno aperto di S .

Un secondo risultato che possiamo dimostrare attraverso l'utilizzo delle partizioni dell'unità è "la densità" delle funzioni lisce nell'insieme delle funzioni continue.

La prossima proposizione, come prima, vale quando il codominio è $\mathbb{R}^n$; in seguito, però, vedremo che questo risultato si può in un certo senso estendere al caso in cui la varietà d'arrivo sia una varietà qualsiasi.

Proposizione 2.20

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua, $S \subset M$ un chiuso e supponiamo che $f|_S$ sia liscia. Allora $\forall \varepsilon : M \rightarrow (0 + \infty)$ continua esiste $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia tale che $g|_S = f|_S$ e che in generale $\|g(p) - f(p)\| < \varepsilon(p)$.

Dimostrazione. Iniziamo con il dimostrare la tesi localmente: dato $p \in M$, cerco una funzione $g_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfi la tesi per U_p . Si distinguono due casi:

- se $p \in S$, allora esiste $g_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $g_p|_{S \cap U_p} = f|_{S \cap U_p}$ (per definizione di funzione liscia, in quanto $f|_S$ è liscia per ipotesi), e a meno di restringere un po' U_p (nel senso che l'immagine sia contenuta in una palla di raggio molto piccolo) ho la tesi;
- nel caso in cui $p \notin S$, allora pongo $g_p(x) = f(p)$, e anche in questo caso restringo U_p in modo che l'immagine sia contenuta in una palla adeguata.

Cerchiamo di usare la costruzione locale per dimostrare la tesi globalmente. Per farlo, usiamo nuovamente l'esistenza di una partizione dell'unità: sia $\{\rho_p\}_{p \in M}$ la partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_p\}_{p \in M}$, e definiamo

$$g(x) = \sum_{p \in M} \rho_p(x) g_p(x).$$

La buona definizione e il fatto che sia liscia sono verifiche analoghe alla proposizione precedente. Per vedere che vale la tesi sulla vicinanza tra $g(x)$ e $f(x)$, ci basta notare che, fissato $x \in M$, $g(x)$ è per definizione una somma convessa di funzioni $(g_p(x))$ che rispettano la disuguaglianza, quindi

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_{p \in M} \rho_p(x) g_p(x) - f(x) \right\| = \left\| \sum_{p \in M} \rho_p(x) g_p(x) - \sum_{p \in M} \rho_p(x) f(x) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{p \in M} \rho_p(x) (g_p(x) - f(x)) \right\| \leq \sum_{p \in M} \rho_p(x) \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \sum_{p \in M} \rho_p(x) = \varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

La $\varepsilon(x)$ che compare nella tesi della proposizione è una funzione continua, ma la tesi rimane interessante anche nel caso in cui ε sia un valore fissato, e anche se $S = \emptyset$ (cioè f è solo continua su M).

2.1.2 Spazio Tangente

Data una funzione liscia tra due varietà, vorremo capire quanto "varia" $f : M \rightarrow N$ se ci spostiamo su M . Quello che vorremmo fare è introdurre il concetto di "derivata" e il differenziale di una funzione tra varietà, cioè la funzione lineare che meglio la approssima. Per fare ciò, dobbiamo prima introdurre quello che è lo spazio tangente ad una varietà M in un punto p . Esistono due possibili definizioni:

Definizione 2.21 - Spazio tangente 1

Data una varietà liscia M e $p \in M$, lo spazio tangente ad M in p è definito come

$$T_p M := \{ \alpha : I \rightarrow M \text{ curva liscia, } I \subset \mathbb{R} \text{ aperto, } 0 \in I, \alpha(0) = p \} / \sim,$$

dove la relazione di equivalenza è data nella seguente maniera: si considerino due curve α e β e una carta $\phi : U_p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ carta. La carta ϕ definisce due nuove curve $\bar{\alpha} := \phi \circ \alpha|_{\alpha^{-1}(U_p)}$ e $\bar{\beta} := \phi \circ \beta|_{\beta^{-1}(U_p)}$, che sono funzioni definite in un sottointervallo $J \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$, e quindi ha senso derivarle. Diciamo che $\alpha \sim \beta$ se

$$\frac{d}{dt} \bar{\alpha}(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \bar{\beta}(t)|_{t=0},$$

ovvero se $(\bar{\alpha})'(0) = (\bar{\beta})'(0)$.

Un esempio importante è quello di un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ (infatti, per testare se una definizione è data in maniera corretta, si va a testarla negli esempi più semplici possibili). Dato $p \in U$, possiamo identificare canonicamente $T_p U$ con $\mathbb{R}^n$, tramite la funzione

$$\{ \alpha \} / \sim \mapsto (\bar{\alpha})'(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Per la seconda definizione occorre introdurre il concetto di derivazione. Come notazione in seguito useremo $C^\infty(M, N) = \{ \text{funzioni lisce } M \rightarrow N \}$, e nel caso $N = \mathbb{R}$ denoteremo $C^\infty(M, \mathbb{R}) = C^\infty(M)$.

Definizione 2.22 - Derivazione

Una derivazione in p è una mappa ("un qualcosa") che ad ogni funzione $f \in C^\infty(U_p)$, per qualche U_p intorno aperto di p , assegna un numero $v(f)$ tale che:

- è locale, cioè se f e g coincidono su un intorno di p , allora $v(f) = v(g)$;
- è lineare: $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(U_p)$;
- vale la regola di Leibniz, cioè $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

Introduciamo quindi la seconda definizione di spazio tangente:

Definizione 2.23 - Spazio tangente 2

Data M varietà liscia e $p \in M$, definiamo $T_p M := \{ \text{Derivazioni in } p \}$.

Notiamo che in questo caso non c'è nessun quoziente e nessuna relazione di equivalenza. Con questa definizione, $T_p M$ è in maniera naturale uno spazio vettoriale. Infatti, prese due derivazioni v_1 e v_2 , una loro combinazione lineare è definita come $(\lambda v_1 + \mu v_2)(f) := \lambda v_1(f) + \mu v_2(f)$, e soddisfa le proprietà delle derivazione.

Come prima, vogliamo testare la definizione sul caso di $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

Proposizione 2.24

Dato $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, l'identificazione canonica data da

$$\mathbb{R}^n \rightarrow T_p U \quad v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \partial_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

è un isomorfismo tra $T_p U$ e $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Notiamo che sorprendentemente ∂_v è una derivazione. Usando la definizione, mostriamo che una derivazione v è una derivata direzionale. Per farlo, data $f \in C^\infty(U_p)$, useremo la "formula di Taylor per topologici":

$$f(p+x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)x_i + \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(x)x_i x_j.$$

Applichiamo la derivazione v a f , ovvero

$$\begin{aligned} v(f) &= f(p)v(1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v(x_i) + \sum_{i,j=1}^n (v(g_{i,j}) \cdot 0 \cdot 0 + g_{i,j}(0) \cdot v(x_i) \cdot 0 + g_{i,j}(0) \cdot 0 \cdot v(x_j)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i. \end{aligned}$$

Il fatto che $v(g_{i,j}(x)x_i x_j)$ faccia quello che è stato scritto sopra segue dal fatto che la nostra valutazione sta avvenendo nel punto $x_0 = 0 = (0, \dots, 0)$, mentre l'ultima uguaglianza è data da

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1v(1) + v(1)1 = 2v(1) \iff v(1) = 0.$$

Quindi

$$v(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i,$$

dove $v_i = v(x_i)$, e quindi $v(f)$ è proprio $\partial_v(f)$. □

Come si fa passare da una definizione all'altra? C'è una mappa abbastanza naturale data da

$$\{\alpha : I \longrightarrow M, \alpha(0) = p\} / \sim \longrightarrow \{\text{Derivazioni in } p\} \quad \alpha \longmapsto v_\alpha, \text{ dove } v_\alpha(f) := (f \circ \alpha)'(0).$$

Definizione 2.25 - Differenziale

Sia $f : M \longrightarrow N$ liscia. Il differenziale di f in p è una mappa $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ data da

- con la definizione 1, $[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$;
- con la definizione 2, $v \longmapsto v_f$ con $v_f(g) := v(g \circ f)$.

Per chi vuole fare le dovute verifiche, si può dimostrare che:

- $[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$ è una mappa ben definita;
- v_f è una derivazione (e quindi la mappa $v \longmapsto v_f$ è ben definita);
- le due definizioni di differenziale coincidono;
- df_p è lineare.

Il differenziale ha delle proprietà funtoriali che lo rendono "comodo", in particolare:

- manda l'identità (come mappa $M \longrightarrow M$) nell'identità (come mappa $T_p M \longrightarrow T_p M$), cioè $d(id_M)_p = id_{T_p M}$;
- rispetta la composizione di funzioni: date $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow Z$, allora $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.

Corollario 2.26

$f : M \longrightarrow N$ diffeomorfismo, allora df_p è invertibile.

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste $g : N \longrightarrow M$ inversa liscia di f , cioè tale che $g \circ f = id_M$ e $f \circ g = id_N$. Per le proprietà descritte sopra abbiamo che

$$id_{T_p M} = d(id_M)_p = d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

e che

$$id_{T_{f(p)} N} = d(id_N)_{f(p)} = d(f \circ g)_{f(p)} = df_p \circ dg_{f(p)}.$$

Quindi df_p è invertibile con inversa $dg_{f(p)}$. $\square$

Corollario 2.27

$\dim(T_p M) = \dim(M)$.

Dimostrazione. Sia $p \in M$, e prendiamo una carta $\phi : U_p \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$; il differenziale

$$d\phi_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} V \cong \mathbb{R}^n$$

è un isomorfismo, e lo spazio di arrivo ha dimensione n , come M . $\square$

Data $f : M \longrightarrow N$, vogliamo capire cosa vuol dire leggere f in carte. Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_p \subset M & \xrightarrow{f} & W_{f(p)} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ V \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & Z \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Per le proprietà functoriali del differenziale, allora abbiamo anche il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)} N \\ d\phi \downarrow & & \downarrow d\psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{dF_{\phi(p)}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

La mappa $dF_{\phi(p)}$ è lo Jacobiano della mappa F (indotta da f).

2.1.3 Orientazione

Vogliamo definire l'orientazione e dire cosa è una varietà orientata. Per farlo, partiamo con il definire l'orientazione di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n .

Definizione 2.28 - Orientazione di uno spazio vettoriale

Dato uno spazio vettoriale reale n -dimensionale V , consideriamo $\mathcal{B} = \{\text{basi di } V\}$, con la relazione di equivalenza data da $B \sim D$ se e solo se la matrice del cambio di base da B a D ha determinante positivo. Un'orientazione per V è una scelta di una classe di equivalenza, che viene definita quindi positiva.

Chiaramente, dato uno spazio vettoriale V esistono due classi di equivalenza, quindi due possibili orientazioni. Nel caso particolare di $\mathbb{R}^n$, la scelta dell'orientazione positiva è data dalla classe di equivalenza della base canonica (mentre, per uno spazio qualsiasi, non c'è una scelta privilegiata).

Cerchiamo ora di dare una definizione di orientazione per le varietà. Diamo due definizioni, e vediamo come passare da una all'altra.

Definizione 2.29 - Varietà orientata 1

Una varietà orientata è una varietà liscia dotata di un atlante orientato. Un atlante si dice orientato se i differenziali di tutte le sue mappe di transizione hanno determinante positivo, cioè data

$$\phi_{ij} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j),$$

allora $\det(d(\phi_{ij})_x) > 0 \ \forall x \in \phi_i(U_i \cap U_j)$.

Abbiamo nuovamente la sottigliezza che non ci interessa veramente l'atlante che usiamo, in quanto due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ che sono compatibili secondo la definizione 1 danno la stessa struttura sulla varietà M .

Definizione 2.30 - Varietà orientata 2

Una varietà orientata è una scelta di un'orientazione o_p di $T_p M \ \forall p \in M$, che sia continua in p . La continuità qui è intesa nel seguente senso: $\forall p \in M$ esiste una carta $\phi : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\forall q \in U_p \ d\phi_q : T_q M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mandi basi positive in basi positive (in quanto $\mathbb{R}^n$ è canonicamente orientato da $(e_1, \dots, e_n)$).

Definizione 2.31 - Orientazione

Data M varietà liscia, un'orientazione su M è un qualcosa che renda M una varietà orientata, cioè:

- considerando la prima definizione, un'orientazione è un atlante $\mathcal{A}$;
- considerando la seconda definizione, un'orientazione per M è un'orientazione su $T_p M$.

Come passiamo da una definizione all'altra?

- (1) $\longrightarrow$ (2)

Se ho $[\mathcal{A}]$, fissato $p \in M$, scelgo o_p nel seguente modo: sia $\phi \in \mathcal{A}$, con

$$\phi : U_p \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad d\phi_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dico che una base $(b_1, \dots, b_n)$ è positiva se e solo se la base $(d\phi_p(b_1), \dots, d\phi_p(b_n))$ lo è. Prendendo la stessa ϕ di prima si verifica che vale anche la continuità.

- (2) $\longrightarrow$ (1)

Abbiamo o_p e stiamo cercando un atlante. Usiamo il fatto che o_p è una scelta continua, cioè $\forall p \in M$ esiste $\phi : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che raccorda le orientazioni, cioè $d\phi_q : T_q M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mandi basi positive in basi positive. Allora scelgo $\mathcal{A} = \{\phi : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n\}_{p \in M}$ (con ϕ scelta come sopra).

Esempi:

- $U \subset \mathbb{R}^n$ è naturalmente orientato. Con la prima definizione, l'atlante dato da

$$\mathcal{A} = \{id : U \longrightarrow U\}$$

è orientato (in quanto composto da un'unica mappa); considerando la seconda definizione, lo spazio tangente è orientato come $\mathbb{R}^n$ stesso.

- $S^n \subset \mathbb{R}^n$ è orientabile (cioè ha almeno un'orientazione; una varietà diventa orientata quando si fa una scelta per l'orientazione). Un fatto generale è il seguente: se M ha un atlante costituito da due carte $\mathcal{A} = \{\phi_U, \phi_V\}$ con $U \cap V$ connesso, allora è orientabile. Se dimostriamo questo fatto, otterremo anche che S^n è orientabile, in quanto possiamo considerare l'atlante dalle proiezioni stereografiche. Sia dunque $\mathcal{A}$, l'atlante di prima, e consideriamo

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \longrightarrow \phi_V(U \cap V),$$

mappa tra due aperti connessi di $\mathbb{R}^n$. Il segno del determinante del differenziale è quindi costante (la mappa è un diffeomorfismo, quindi non si può annullare; se avesse due punti

con segni discordi, per il teorema dei valori intermedi avrebbe un punto in cui si annulla), dunque è sempre positivo o sempre negativo. Nel caso sia sempre positivo, allora va bene; nel caso sia negativo, allora consideriamo r riflessione lungo un iperpiano, e $\phi'_V = r \circ \phi_V$, così da ottenere

$$d(\phi'_V \circ \phi_U^{-1}) = d(r \circ \phi_V \circ \phi_U^{-1}) = dr \circ d(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) = -d(\phi_V \circ \phi_U^{-1}).$$

L'orientazione è una proprietà interessante, e in particolare ci permettere di distinguere tra varietà orientabili e varietà orientabili; nel caso di varietà connesse, abbiamo la seguente

Proposizione 2.32

M varietà liscia connessa ammette 0 o 2 orientazioni.

Dimostrazione. Usiamo la seconda definizione. Data $\mathcal{O}$ orientazione, vogliamo vedere che l'unica altra orientazione che può esistere è $-\mathcal{O}$, cioè $\forall p \in M$ vale che o_p e $-o_p$ sono orientazioni opposte. $-\mathcal{O}$ è chiaramente un'orientazione, è supponiamo per assurdo che $\mathcal{O}'$ sia una terza orientazione, diversa dalle due precedenti. Siccome $\forall p \in M$ deve valere che $o'_p = o_p$ o che $o'_p = -o_p$, allora definiamo

$$S = \{p \in M : o'_p = o_p\} \quad \text{e} \quad -S = \{p \in M : o'_p = -o_p\},$$

e vale che $M = S \cup -S$. Se dimostriamo che sono entrambi aperti abbiamo concluso, in quanto M è connessa. Consideriamo il caso di S , l'altro è analogo.

Sia $p \in S$, e per definizione (2) di orientazione vale che (a meno di intersecare gli intorni posso supporre che sia lo stesso) esistono $\phi, \psi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che $\forall q \in U_p$ $d\phi_q$ e $d\psi_q$ mandano basi positive in basi positive (ϕ rispetto all'orientazione o_q e ψ rispetto a quella data da o'_q). Ma per la continuità della scelta, poichè $o'_p = o_p$, allora avremo $o'_q = o_q \forall q \in U_p$, e quindi $U_p \subset S$, cioè S è aperto. $\square$

Date le prime definizioni, vogliamo vedere che esistono delle varietà che non sono orientabili. Dimostrare a mano che qualcosa non è orientabile è molto difficile, quindi prendiamo un'altra via. Richiamiamo alcune definizioni:

Definizione 2.33

Un'azione di un gruppo G su un insieme X è un omomorfismo

$$G \rightarrow S(X) = \{f : X \rightarrow X \text{ bigettive}\}.$$

Diciamo che l'azione è libera se $g(x) \neq x \forall x \in X$ e $\forall g \in G$.

Nel caso in cui X sia uno spazio topologico, diciamo che l'azione è propriamente discontinua se $\forall x \neq y \in X$ esistono U e V intorni di x e y tali che la cardinalità di

$$\{g \in G : g(U) \cap V \neq \emptyset\}$$

è finita.

Se M è una varietà liscia, allora diciamo che G agisce su M in modo liscio se l'omomorfismo dell'azione è a valore in $\text{Diff}(M) := \{f : M \rightarrow M \text{ diffeomorfismo}\}$.

Definizione 2.34 - Diffeomorfismo locale

Una funzione tra varietà $f : M \rightarrow N$ si dice diffeomorfismo locale se $\forall p \in M$ esistono U_p e $V_{f(p)}$ tali che $f|_{U_p} : U_p \rightarrow V_{f(p)}$ è un diffeomorfismo.

Teorema 2.35

M varietà liscia, G agisce su M in modo liscio, libero e propriamente discontinuo. Allora il quoziente ha una naturale struttura di varietà liscia; inoltre,

$$\pi : M \rightarrow M/G$$

è un rivestimento liscio, cioè è un rivestimento topologico e un diffeomorfismo locale.

Dimostrazione. Da Geometria 2 sappiamo che se M è di Hausdorff e a base numerabile, allora anche M/G è di Hausdorff e a base numerabile e la proiezione

$$\pi : M \longrightarrow M/G$$

è un rivestimento. Quindi se M è una varietà topologica, anche M/G è una varietà topologica. Infatti, dato $q \in M/G$, allora sappiamo che esiste U_q intorno ben rivestito, e cioè tale che

$$\pi^{-1}(U_q) = \bigsqcup_{i \in I} V_i \quad \text{e} \quad \pi|_{V_i} : V_i \longrightarrow U_q \text{ è un omeomorfismo.}$$

In particolare, possiamo supporre che

$$p_i = \pi^{-1}(q) \cap V_i$$

abbia un intorno omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$ e a meno di restringere posso supporre che tale intorno sia proprio V_i . Costruiamo l'atlante $\mathcal{A} := \{\phi \circ \pi^{-1}\}$, dove ϕ era una carta locale per p_i . Esso è un atlante liscio: G agisce su M in modo liscio. Se cambio il punto in cui sollevo q , cioè considero un altro p_j , allora potrei avere un'altra carta; questo non causa un problema, in quanto per definizione di proiezione esisterà $g \in G$ tale che $g(p_j) = p_i$, e in particolare g corrisponde ad una mappa liscia. $\square$

Esempi

Varietà che possiamo costruire con il teorema precedente:

- Il Toro è una varietà liscia. Sia $\mathbb{Z}^n$ che agisce su $\mathbb{R}^n$ per traslazione, cioè

$$g(x) = x + g,$$

tale azione è libera e propriamente discontinua ($\mathbb{Z}^n$ è discreto in $\mathbb{R}^n$), quindi $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ è una varietà liscia per il teorema.

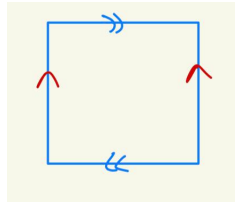
- Bottiglia di Klein. Siano

$$f(x, y) = (x + 1, y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = (-x, y + 1),$$

e $G = \langle f, g \rangle$. L'azione di G su $\mathbb{R}^2$ è libera e propriamente discontinua (non è un fatto banale), con dominio fondamentale

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [0, 1],$$

identificato come sotto. Per il teorema precedente, essa è una varietà liscia.



- Gli Spazi Lenticolari $L(p, q)$. Siano p e q due numeri interi coprimi, e consideriamo

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

la radice p -esima dell'unità. Considero S^3 come coppie di numeri complessi, dati da

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Consideriamo $f : S^3 \rightarrow S^3$ data da

$$f(z, w) = (\omega z, \omega^q w).$$

Il gruppo generato da f è isomorfo a $\mathbb{Z}/p$, ed in particolare l'azione di $G := \langle f \rangle$ su S^3 è libera (in quanto f è data da riflessioni per iperpiani non banali) e propriamente discontinua (in quanto il gruppo è finito). Chiamiamo $L(p, q) = S^3/G$, ed in particolare

$$\pi_1(L(p, q)) = G = \mathbb{Z}/p.$$

Si noti che, nonostante q non faccia nulla di fatto (in quanto se p e q sono coprimi allora anche ω^q è radice p -esima dell'unità), al variare di q si ottengono spazi non omeomorfi tra loro.

Proposizione 2.36

M varietà liscia, G agisce su M in modo liscio, libero e propriamente discontinuo. Sappiamo che $\pi : M \rightarrow M/G$ è un rivestimento liscio, inoltre vale che M/G è orientabile se e solo se M è orientabile e G agisce su M preservandone l'orientazione, cioè

$$\forall \phi \in G, \quad \phi : M \rightarrow M \quad e \quad \forall x \in M, \quad d\phi_x : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} M$$

manda basi positive in basi positive.

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni:

- ($\rightarrow$) Uso la seconda definizione. Esiste un'orientazione per M/G e la uso per per definirne una su M . Dato $p \in M$, guardo alla proiezione $\pi : M \rightarrow M/G$, e so che esso è un diffeomorfismo locale. Definisco $(v_1, \dots, v_n)$ base positiva di $T_p M$ se anche $(d\pi_p(v_1), \dots, d\pi_p(v_n))$ lo è come base di $T_{\pi(p)} M/G$ (bisognerebbe verificare che questa è effettivamente una scelta continua).

G preserva l'orientazione:

$$\pi \circ g = \pi \quad \forall g \in G \implies d\pi_{g(p)} \circ dg_p = d\pi_p,$$

e quindi dg_p è positiva.

- ($\leftarrow$) Supponiamo che M sia orientabile e che G agisca su M preservando l'orientazione. Sia $y \in G/M$ e consideriamo U_y un intorno ben rivestito. Posto $p \in \pi^{-1}(y)$, si può definire la positività di una base di $T_y M/G$ nella maniera ovvia (cioè come fatto prima). La buona definizione dell'orientazione è data dal fatto che, considerando un altro sollevamento di y , allora possiamo passare da p_i a p_j tramite un elemento $g \in G$, che ne preserva l'orientazione. La continuità deriva dalla continuità dell'orientazione di M .

□

Corollario 2.37

$\mathbb{T}^n$ ($\mathbb{Z}^n$ agisce su $\mathbb{R}^n$ preservandone l'orientazione) e $L(p, q)$ sono orientabili, mentre la bottiglia di Klein no (l'elemento g non rispetta l'orientazione).

Corollario 2.38

$\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è orientabile se e solo se n è dispari.

Dimostrazione. $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = S^n/\iota$, dove con ι indichiamo la mappa antipodale. Inoltre ι preserva l'orientazione se e solo se n è dispari, poiché è composizione di $(n+1)$ riflessioni. □

Teorema 2.39

Data M varietà non orientabile e connessa, allora esiste $\tilde{M}$ rivestimento doppio di M e orientabile.

Dimostrazione. Diamo un'idea della dimostrazione.

Come si costruisce $\tilde{M}$? $\tilde{M} := \{(p, o_p) : o_p \text{ è un'orientazione di } T_p M\}$. Abbiamo quindi una mappa

$$\tilde{M} \longrightarrow M \quad (p, o_p) \longmapsto p.$$

Alla fine otteniamo che la non orientabilità di M ci induce la connessione di $\tilde{M}$. □

Corollario 2.40

Se $\pi_1(M)$ non ha sottogruppi di indice 2, allora M è orientabile.

Se M è semplicemente connessa, allora M è orientabile.

Abbiamo visto che $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è orientabile se e solo se n è dispari. Facciamo un excursus e vediamo cosa succede nel caso complesso.

Definizione 2.41 - Funzione olomorfa

$f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ si dice olomorfa se è liscia come funzione $\mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ e il differenziale $df_p : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ è $\mathbb{C}$ -lineare.

Definizione 2.42 - Varietà complessa

Una varietà complessa è una coppia $(M, \mathcal{A})$ dove M è una $2n$ -varietà topologica reale e $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subset \mathbb{C}^n\}$ è tale che le mappe di transizione siano olomorfe.

Osservazione

Una Varietà complessa è sempre **ORIENTATA** (che è diverso dal solo fatto di essere orientabile, dove la scelta per l'orientazione deve ancora essere fatta). Il punto è che il determinante (reale) di una funzione $\mathbb{C}$ -lineare è sempre positivo, come mappa $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Quindi $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è orientata.

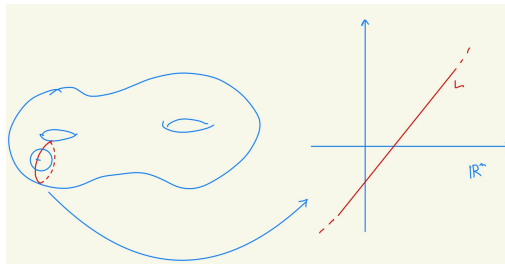
2.2 Sottovarietà

Passiamo ora a parlare di sottovarietà. Nonostante possa sembrare un argomento banale (la definizione di sottovarietà è quella che uno si aspetta), andremo a trattare anche di oggetti e risultati più delicati, fino ad enunciare e dimostrare i teoremi di immersione di Whitney (che ricollegano le definizioni di varietà astratta e di varietà come sottoinsieme particolare di qualche $\mathbb{R}^k$).

Definizione 2.43 - Sottovarietà

M varietà, $S \subset M$ (qualsiasi) si dice sottovarietà di dimensione k se $\forall p \in S$ esiste $\phi : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ carta tale che $\phi(U_p \cap S) = L$ sottospazio affine di dimensione k .

Quindi le sottovarietà k -dimensionali, lette in carte, non sono altro che k -sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Si noti che quando $k = n$, allora la sottovarietà S non è altro che un aperto di M .



Osservazione

S è in modo naturale una k -varietà (basta prendere le ϕ della definizione e comporle con un'affinità che mandi il sottospazio affine L in $\mathbb{R}^k$). Come atlante prendiamo $\mathcal{A} = \{\phi : U_p \cap S \rightarrow L \rightarrow \mathbb{R}^k\}$.

Esempio

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia, $S = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\}$ è una sottovarietà. Come carta scegliamo

$$\phi : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m \times \{0\}) \quad (x, y) \mapsto (x, y - f(x)).$$

Corollario 2.44

Ogni $S \subset \mathbb{R}^n$ che è localmente esprimibile come un grafico di una funzione liscia è una sottovarietà.

Osservazione

$S \subset M$ sottovarietà, allora $\forall s \in S$ $T_s S$ è naturalmente un sottospazio di $T_s M$. Con la definizione tramite le curve è una cosa ovvia (le curve in S sono anche curve in M), la cosa meno ovvia è capire cosa succede con le derivazioni.

Osservazione

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, allora vale che $\forall p \in S^n$ $T_p S^n = p^\perp$

Esempio

Un sottospazio proiettivo k -dimensionale $S \subset \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ (o di $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$) è il luogo di zeri di $n - k$ equazioni omogenee lineari indipendenti, quindi è una sottovarietà liscia, in quanto letta in carte diventa un k -sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$).

In particolare, esso è diffeomorfo a $\mathbb{P}^k \mathbb{R}$ (rispettivamente $\mathbb{P}^k \mathbb{C}$).

2.2.1 Immersione ed embedding

Introduciamo ora immersioni, sommersioni ed embedding., che altro non sono che funzioni lisce tra varietà con particolari proprietà.

Definizione 2.45 - Immersione e sommersione in un punto

$f : M \rightarrow N$ liscia si dice immersione in un punto $p \in M$ se df_p è iniettivo.

Diciamo che f è una sommersione in p se df_p è surgettivo.

Definizione 2.46 - Immersione e sommersione

f si dice immersione se lo è $\forall p \in M$, sommersione se lo è $\forall p \in M$, diffeomorfismo locale se lo è $\forall p \in M$.

Nel caso in cui df_p sia invertibile, non dobbiamo definire nulla di nuovo, in quanto abbiamo già il termine adatto:

Teorema 2.47 - Invertibilità locale

$f : M \rightarrow N$, df_p è invertibile se e solo se f è un diffeomorfismo locale in p , cioè esistono U_p e $V_{f(p)}$ tali che $f(U_p) = V_{f(p)}$ e $f|_{U_p}$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. Locale $\rightarrow$ Lo guardo in carte $\rightarrow$ Già visto ad Analisi 2. Grazie Analisti :). $\square$

Le immersioni e le sommersioni sono particolarmente interessanti in quanto, localmente (vale a dire che esiste una carta) sembrano appunto delle inclusioni e delle proiezioni. Il seguente teorema ci assicura l'esistenza di tali carte.

Teorema 2.48 - Forma normale per immersioni/sommersioni

Sia $f : M \rightarrow N$. Se f è un'immersione in p , allora esistono delle opportune carte dove f si legge come

$$\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Analogamente, se f è una sommersione, esistono opportune carte per cui, letta in carte, diventa

$$\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

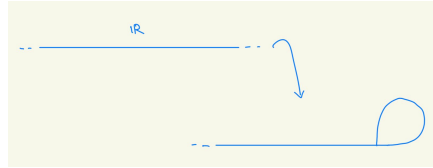
Quando diciamo che esistono delle opportune carte in cui f si legge come ι (o come π), intendiamo che esistono $\phi : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V_i \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ carte per M e N (dove $f(U_i) \subset V_i$), dove il diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{f} & V_i \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Quelle che ci interesseranno particolarmente, grazie alla forma normale del Teorema 2.48, sono le immersioni. Un'immersione, però, non è detto che sia iniettiva, e in generale (anche quando lavoriamo con un'immersione iniettiva) manca di alcune buone proprietà.

Non esempio

In generale, non è detto che un'immersione iniettiva sia un omeomorfismo con l'immagine, in particolare non è detto che sia aperta.



Possiamo ovviare a queste mancanze introducendo un nuovo tipo di funzione (che sono sempre legate alle immersioni), ovvero gli embedding.

Definizione 2.49 - Embedding

Un Embedding è un'immersione iniettiva $f : M \rightarrow N$ tale che f sia un omeomorfismo con l'immagine.

Esercizio

f immersione iniettiva e propria (cioè la controimmagine di un compatto è un compatto), allora f è un embedding.

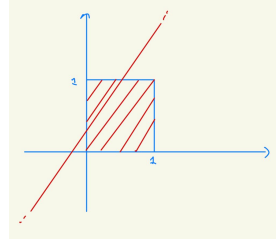
Non esempio interessante

Consideriamo $p, q \in \mathbb{R}$ entrambi diversi da zero, e consideriamo la mappa

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (tp, tq)$$

e la proiezione $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. $\pi \circ f$ è un'immersione? Un embedding?

Partiamo con il vedere che $df_x = (p, q) \neq (0, 0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed in più π è un diffeomorfismo locale, quindi $\pi \circ f$ è un'immersione. Inoltre vale che $\pi \circ f$ è iniettiva se e solo se $\frac{p}{q}$ non è razionale. In tal caso si potrebbe pensare che $\pi \circ f$ sia un embedding, ma non è così: l'immagine non è localmente connessa, e quindi $\pi \circ f$ non può essere un omeomorfismo con l'immagine.



Gli embedding sono importanti per la seguente ragione: fissate M e N varietà lisce e $f : M \rightarrow N$ embedding, allora $f(M)$ è una sottovarietà di N . La dimostrazione (non fatta a lezione) si affronta nel seguente modo: fissato $p \in M$, esistono U e V intorno aperti rispettivamente di p e di $f(p)$ tali che

$$f|_U : U \rightarrow V \cap f(M)$$

è un omeomorfismo (per definizione di embedding, deve essere omeomorfismo con l'immagine). Possiamo sfruttare il teorema 2.48 e trovare coordinate per cui V e $V \cap f(M)$ vengono mandati in $\mathbb{R}^n$ e ad un suo sottospazio affine L . Abbiamo quindi parametrizzato $f(M)$ come un sottospazio affine, e perciò è una sottovarietà.

Vogliamo dimostrare per le sommersioni un risultato che è in un certo senso "duale" a quello appena visto per gli embedding. Infatti, se le immagini di embedding sono sottovarietà del codominio, allo stesso modo (sotto dovute ipotesi) la preimmagine di un punto attraverso una sommersione è una sottovarietà del dominio.

Richiamiamo da GTD le definizioni di punti e valori regolari.

Definizione 2.50 - Punto e valore regolare

Data $f : M \rightarrow N$, $p \in M$ si dice punto regolare per f se f è una sommersione in p , $q \in N$ si dice valore regolare per f se $f^{-1}(q)$ è composta da soli punti regolari.

Teorema 2.51

Se $q \in N$ è un valore regolare per f , allora $S := f^{-1}(q)$ è una sottovarietà di M , e vale che $T_p S = \text{Ker}(df_p) \forall p \in S$.

Utilizzando il Teorema 2.51 possiamo provare in maniera alternativa il fatto che S^n sia una varietà, ma possiamo dimostrare che anche altri spazi lo sono:

- $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto \|x\|^2$; 1 è valore regolare, quindi $S^n = f^{-1}(1)$ è sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$;
- Sia

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\},$$

dove $M(n, \mathbb{R}) = \{\text{matrici reali } n \times n\}$. La mappa

$$\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto \det(A)$$

è liscia (è polinomiale nei coefficienti delle matrici) e 1 è un valore regolare, dunque $SL_n(\mathbb{R})$ è una sottovarietà (di $M(n, \mathbb{R})$).

Teorema 2.52

Definiamo $M_k(m, n, \mathbb{R}) = \{A \in M(m, n, \mathbb{R}) : A \text{ ha rango } k\}$. $M_k(m, n, \mathbb{R})$ è una sottovarietà di $M(m, n, \mathbb{R})$ di codimensione $(m-k)(n-k)$.

Dimostrazione. Sia $P_0 \in M_k(m, n)$ (omettiamo di specificare che siamo a coefficienti in $\mathbb{R}$); a meno di riordinare righe/colonne, possiamo supporre che P_0 sia della forma

$$P_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix},$$

dove A_0 è $k \times k$ e invertibile. Sia P una matrice vicina a P_0 , cioè

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

e A è invertibile (vicina nel senso che una qualsiasi norma matriciale va bene, in quanto sono tutte equivalenti). Prendiamo

$$Q = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & Id_{n-k} \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{R}),$$

ed in particolare vale che $rnk(P) = rank(PQ)$. Poiché

$$PQ = \begin{bmatrix} Id_k & 0 \\ CA^{-1} & -CA^{-1}B + D \end{bmatrix},$$

PQ ha rango k se e solo se $-CA^{-1}B + D = 0$, cioè se e solo se $D = CA^{-1}B$. Quello che abbiamo scoperto è che, localmente vicino a P_0 , $M_k(m, n)$ si scrive come grafico di

$$GL_k(\mathbb{R}) \times M(k, n-k) \times M(m-k, k) \longrightarrow M(m-k, n-k) \quad (A, B, C) \longmapsto CA^{-1}B.$$

In particolare, la codimensione dello spazio $M_k(m, n)$ è uguale alla dimensione di D , cioè $(m-k)(n-k)$. $\square$

2.2.2 Teoremi di Whitney

Quando abbiamo dato la definizione di varietà, ci eravamo concentrati sul fatto che la definizione di varietà fosse differente da quella data a GTD. La seconda, infatti, considerava come varietà un sottoinsieme di qualche $\mathbb{R}^n$, mentre noi abbiamo dato una definizione che era completamente astratta, senza il bisogno di immergere le varietà in qualche $\mathbb{R}^n$. I teoremi di Whitney che sono enunciati in questa sezione ci dicono che in realtà le due definizioni sono equivalenti, in quanto possiamo immergere ogni varietà in $\mathbb{R}^N$ per qualche N abbastanza grande.

Achtung

Per tutta questa sezione, attenzione alle dimensioni delle cose. Potrei essermi confuso tra m , n e N .

Teorema 2.53 - Immersione compatta

Sia M una varietà compatta di dimensione n . Allora esiste un embedding $M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ per qualche N , cioè ogni M è identificabile come sottovarietà di qualche $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Prendiamo $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ un atlante adeguato, e poichè M è compatta possiamo supporre che $\mathcal{A} = \{\phi_i\}_{i=1, \dots, k}$; siano $V_i = \phi_i^{-1}(\mathbb{B}^n)$, e poichè $\mathcal{A}$ è adeguato, allora i V_i ricoprono M . Sia $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione che abbiamo considerato nel Teorema 2.17, le cui principali caratteristiche erano

$$\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1]) \quad \lambda(x) \begin{cases} = 1 & \|x\| \leq 1 \\ = 0 & \|x\| \geq 2 \\ \in (0, 1) & 1 < \|x\| < 2 \end{cases}$$

Definiamo allora $\lambda_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ in questa maniera: partiamo con il definire λ_i su U_i come

$$\lambda_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R} \quad p \longmapsto \lambda(\phi_i(p)),$$

e la estendo a zero fuori da U_i . Dalla definizione di λ , λ_i rimane liscia (in quanto λ fa zero al di fuori della palla di raggio 2, quindi non ho problemi ad estendere a zero λ_i al di fuori di U_i).

Ora costruiamo ψ_i come

$$\psi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad p \longmapsto \lambda_i(p)\phi_i(p).$$

La proprietà principale di ψ_i è che $\psi_i|_{V_i} = \phi_i$, infatti $\lambda|_{\mathbb{B}^n} \equiv 1$. Come prima, estendendo ψ_i a zero su tutta M ottengo una funzione liscia. Definiamo infine

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad p \longmapsto (\lambda_1(p), \dots, \lambda_k(p), \psi_1(p), \dots, \psi_k(p)),$$

cioè N dipende dalla dimensione della varietà e dal numero di carte dell'atlante. Dimostriamo che F è un embedding:

- Immersione: sia $p \in M$ e consideriamo dF_p . Vogliamo che vedere che dF_p ha rango massimo, cioè che $\text{rank}(dF_p) = n$. Posso quindi concentrarmi sulle sottomatrici $n \times n$; $p \in V_i$ per qualche i , quindi ho che per tale i vale che $\psi_i(x) = \phi_i(x) \forall x \in U_p$. Essendo ϕ_i diffeomorfismo locale, allora $d(\phi_i)_p$ è invertibile, e quindi anche $d(\psi_i)_p$ ha rango n .
- Iniettività: $\lambda_i(p) = 1$ se e solo se $p \in V_i$, cioè possiamo pensare ai λ_i come dei "Flag" che si accendono quando $p \in V_i$. Supponiamo perciò che $F(p) = F(q)$; se $p \in V_i$ abbiamo che $\lambda_i(p) = 1 \rightarrow \lambda_i(q) = \lambda_i(p) = 1 \rightarrow q \in V_i$ e quindi $p, q \in \bar{V}_i$. Ma in $\bar{V}_i$ abbiamo che $\psi_i \equiv \phi_i$, e ϕ_i è iniettiva. Quindi se $F(p) = F(q) \rightarrow \phi_i(p) = \phi_i(q) \rightarrow p = q$.

Detto questo, osserviamo che se $F : M \longrightarrow N$, con M compatta, è un'immersione iniettiva, allora F è un embedding (in particolare basta dimostrare che F sia propria, e questo segue dalla compattezza di M). $\square$

Curva di Peano

Si può costruire una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ continua e surgettiva, detta curva di Peano. Essendo f continua, sappiamo già che esiste una funzione liscia "abbastanza vicina" ad f (Proposizione 2.20) e quindi esiste una F immersione abbastanza vicina a f . Tale immersione, però, non può essere iniettiva.

Il Teorema 2.53 si può rafforzare, e in particolare si può togliere l'ipotesi di compattezza di M (Teorema di immersione di Whitney). Per la dimostrazione, però, dobbiamo prima parlare un po' di misura e di insiemi di misura nulla.

Definizione 2.54 - Boreliano

X spazio topologico, un boreliano è un sottoinsieme costruito a partire dagli aperti con operazioni date dal passaggio al complementare, unioni e intersezioni numerabili.

Definizione 2.55

Diciamo che un boreliano $S \subset X$ ha misura nulla se ce l'ha letta in qualsiasi carta, cioè se resa $\phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, allora $\phi(U \cap S) \subset V \subset \mathbb{R}^n$ ha misura (di Lebesgue) nulla.

La definizione in realtà poteva essere data con "esiste una carta $\phi \dots$ ", e poi potevamo sfruttare il fenomeno "esiste implica per ogni" per vedere che le due definizioni sono equivalenti, in quanto i diffeomorfismi mandano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla (cosa che non vale per gli omeomorfismi).

Lemma 2.56 - Lemma di Sard

$f : M \longrightarrow N$ liscia, l'insieme dei valori non regolari di f ha misura nulla.

Dimostrazione. Letto in carte, la tesi è equivalente al Lemma di Sard generale. Grazie Analisti parte due :) $\square$

Corollario 2.57

$f : M \longrightarrow N$ liscia e $m < n$, allora f non può essere surgettiva, in quanto l'immagine ha misura nulla.

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Immersione di Whitney:

Teorema 2.58 - Immersione di Whitney

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ liscia, e siano $\dim(M) = m$ e n tali che $n \geq 2m$; allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ immersione tale che $\|F(p) - f(p)\| < \varepsilon \forall p \in M$.

Dimostrazione. Scegliamo un atlante adeguato $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$. Chiamiamo

$$M_j = \bigcup_{i=1}^j U_i,$$

e consideriamo le ψ_i costruite come nel Teorema 2.53 (cioè che coincidono con ϕ_i su $V_i := \phi_i^{-1}(\mathbb{B}^n)$ e che valgono zero al di fuori di U_i). Quello che vogliamo fare è creare una successione di funzioni lisce $F_0, F_1, F_2 \dots$ a valori in $\mathbb{R}^n$ tali che

1. le F_i siano "vicine" a f , cioè $\|f(p) - F_i(p)\| < \varepsilon$ per ogni $p \in M$;
2. F_i coincida con F_{i-1} su tutta M tranne che in U_i ;
3. $d(F_i)_p$ sia iniettivo per ogni $p \in M_i$.

Partiamo da $F_0 = f$ e scriviamo ricorsivamente

$$F_i = F_{i-1} + A_i \psi_i,$$

dove A_i è una matrice $n \times m$ per cui valgono le tre condizioni. Quello che dobbiamo dimostrare è che effettivamente riusciamo a trovare delle matrici A_i per cui, scrivendo F_i ricorsivamente in questo modo, allora valgono le tre condizioni desiderate. Vediamo che:

1. se prendiamo A_i di norma abbastanza piccola (norma matriciale), allora la condizione (1) è soddisfatta;
2. la condizione (2) è soddisfatta;
3. per la terza condizione bisogna lavorare un attimo. Riscriviamo la relazione ricorsiva e passiamo ai differenziali, cioè otteniamo

$$d(F_i)_p = d(F_{i-1})_p + A_i d(\psi_i)_p.$$

Nel caso in cui $p \in M_i$, allora sappiamo che $d(F_{i-1})_p$ è iniettivo, e se la norma di A_i è abbastanza piccola allora non ci sono problemi. Consideriamo $p \in M_i \setminus M_{i-1}$: per ogni $p \in \bar{V}_i$ si ha che $\psi_i \equiv \phi_i$, e quindi la precedente relazione diventa

$$d(F_i)_p = d(F_{i-1})_p + A_i d(\phi_i)_p.$$

Otteniamo che $d(F_i)_p$ non è iniettiva se e solo se A_i è della forma

$$A_i = B - d(F_{i-1} \circ \phi_i^{-1})_{\phi_i(p)}$$

per qualche $B \in M_k(m, n)$ ($M_k(m, n)$ sono le matrici $m \times n$ di rango k). Dal teorema 2.52, tale varietà ha codimensione $(m - k)(n - k)$. Possiamo considerare la mappa

$$\chi : \mathbb{R}^m \times M_k(m, n) \longrightarrow M(m, n) \quad (x, B) \longmapsto B - d(F_{i-1} \circ \phi_i^{-1})_x.$$

Per ipotesi, $n \geq 2m$ e $k \leq m - 1$, dunque

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^m \times M_k(m, n)) - \dim(M(m, n)) &= m + mn - (m - k)(n - k) - mn = \\ &= m - (m - k)(n - k) \leq m - 1 \cdot (n - m + 1) = 2m - n - 1 < 0. \end{aligned}$$

Siccome la dimensione del codominio è strettamente maggiore della dimensione del dominio, per il Corollario 2.57 la funzione χ non può essere surgettiva, e perciò ci basta scegliere una matrice A_i che abbia norma sufficientemente piccola e che non stia nell'immagine di χ .

Una volta definite in questo modo le F_i , ci basta definire

$$F(p) = \lim_{i \rightarrow +\infty} F_i(p);$$

siccome il ricoprimento è localmente finito, allora tale successione è definitivamente costante, e quindi F è ben definita, e soddisfa la tesi. $\square$

La dimostrazione appena affrontata suggerisce che una qualsiasi perturbazione liscia di una funzione continua f può essere presa in modo tale da risultare un'immersione. Quello che ci chiediamo ora è se si può fare di meglio: possiamo perturbare f in modo da ottenere un'immersione iniettiva? In generale, sotto l'ipotesi che $n \geq 2m$, la risposta è no: ci serve una dimensione in più.

Teorema 2.59 - Immersione Iniettiva di Whitney

$f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Se $n \geq 2m + 1$, allora esiste $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ che è "vicina ad f " e F è un'immersione iniettiva.

La dimostrazione è simile a quella del Teorema 2.54 (e non è stata affrontata a lezione).

Andiamo avanti nello studio delle immersioni di varietà qualsiasi in qualche $\mathbb{R}^N$. Abbiamo visto come riusciamo immergere varietà compatte (Teorema 2.53), e ora vediamo che possiamo dimostrare lo stesso risultato anche per varietà generiche. Per dimostrare tale teorema, introduciamo le esaustioni lisce.

Definizione 2.60 - Esaustione liscia

Un'esauzione liscia di M è una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tale che $f^{-1}([0, x])$ è compatto $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proposizione 2.61

Esiste un'esauzione liscia.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ atlante adeguato e prendiamo $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_i\}$. Definiamo

$$f(p) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i \rho_i(p).$$

La zona in cui $\{\rho_i(p) \neq 0 \forall i < x\}$ è un compatto, che contiene $f^{-1}([0, x])$. $\square$

Grazie all'esistenza di un'esauzione liscia, possiamo dimostrare il seguente

Teorema 2.62 - Embedding di Whitney

Data M , esiste un embedding $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

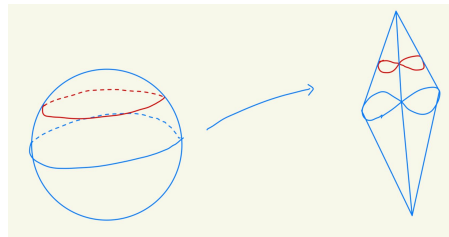
Dimostrazione. Prendo un'esauzione liscia $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ propria; costruisco

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \quad p \mapsto (g(p), 0, \dots, 0).$$

Dal Teorema di Immersione Iniettiva, esiste $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ che è vicino ad f ed è un'immersione iniettiva. Sfrutto il fatto che una perturbazione di una funzione propria è propria, e un'immersione iniettiva propria è un embedding. $\square$

Non Esempio - Ombrello di Whitney

Prendiamo $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data dall'immersione sotto:



Non riesco a perturbarla in modo da ottenere un'immersione, in quanto ai poli il differenziale non sarà mai iniettivo. La figura a destra è un cono formato su un 8, chiamato anche "Ombello di Whitney".

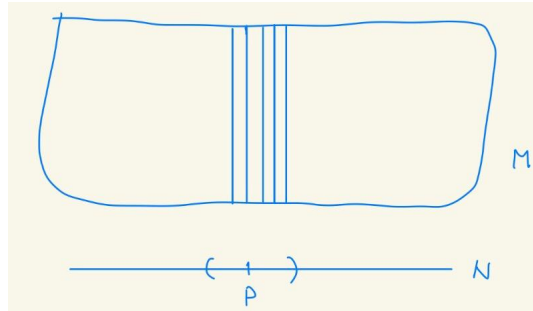
2.3 Fibrati

Introduciamo ora degli oggetti (i fibrati) che sono molto utili da trattare. Cominceremo con il parlare di fibrazioni in generale, per poi passare a parlare di fibrati vettoriali, tra i quali i più importanti saranno i fibrati tangente e cotangente.

Definizione 2.63 - Fibrazione

Una fibrazione, con fibra F , è una mappa $f : M \rightarrow N$ liscia tale che $\forall p \in N$ esiste un intorno aperto U_p e $\phi : f^{-1}(U_p) \rightarrow U_p \times F$ diffeomorfismo per cui il diagramma commuta (dove π_1 è la proiezione sul primo fattore).

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_p) & \xrightarrow{\phi} & U_p \times F \\ & \searrow f \quad \swarrow \pi_1 & \\ & U_p & \end{array}$$



Esempio di fibrato

Osservazione

Se $\dim(F) = 0$, allora la definizione coincide con quella di rivestimento. Inoltre una fibrazione è anche una sommersione: preso $q \in f^{-1}(U_p)$, $df_q = d\pi \circ d\phi_q$ è composizione di mappe surgettive.

Il concetto di fibrazione estende dunque il concetto di rivestimento, e ci permette di lavorare con fibre che siano di qualsiasi genere.

Esempi

Esempi di fibrati sono i seguenti:

- il fibrato banale (con fibra generica F) è il prodotto $E \cong M \times F$, con la proiezione sul primo fattore;
- Sia il toro che la bottiglia di Klein sono esempi di fibrati su S^1 con fibra S^1 . La fibrazione del toro è data da

$$(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \mapsto e^{i\theta}$$

(e infatti corrisponde al fibrato banale, in quanto il toro è diffeomorfo a $S^1 \times S^1$), mentre quella della bottiglia di Klein non è banale (in quanto la bottiglia di Klein non è orientabile, e in particolare non è diffeomorfa al prodotto $S^1 \times S^1$).

Definizione 2.64 - Sezione

In generale, data una fibrazione $\pi : E \rightarrow M$, una sezione è una mappa $s : M \rightarrow E$ liscia tale che $\pi \circ s = id_M$.

Si noti che non tutte le fibrazioni ammettono sezioni.

Come detto precedentemente, ci sono vari tipi di fibrati, in base sia alla struttura delle fibre, sia alle mappe che costituiscono la fibrazione vera e propria. Poniamo particolare attenzione al caso in cui la fibra ammette una struttura di spazio vettoriale.

Definizione 2.65 - Fibrato Vettoriale

Un fibrato vettoriale di rango k su una varietà M è una mappa $\pi : E \rightarrow M$ tale che, detto $E_p = \pi^{-1}(p)$, E_p ha una struttura di spazio vettoriale tale che $\forall p \in M$ esiste U_p intorno aperto e un diffeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U_p) \rightarrow U_p \times \mathbb{R}^k$ per cui il diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_p) & \xrightarrow{\phi} & U_p \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \pi_1 & \\ & U_p & \end{array}$$

ϕ è un diffeomorfismo e inoltre vale che $\phi(E_p) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$ e $\phi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo vettoriale.

Come per le varietà abbiamo introdotto le funzioni lisce, anche per i fibrati si può parlare di morfismi.

Definizione 2.66 - Morfismo di fibrati

Un morfismo di fibrati è una coppia di mappe (F, f) tali che F e f sono lisce e

$$\forall p \in M \quad F(E_p) \subset E_{f(p)}$$

(che sono le fibre) e tali che $F|_{E_p} : E_p \rightarrow E_{f(p)}$ sia lineare.

Diciamo che è un isomorfismo se esiste un morfismo inverso.

Osservazione

Un morfismo è un isomorfismo se F è un diffeomorfismo.

Osservazione - zero sezione

Se $\pi : E \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale, esiste sempre una sezione, chiamata sezione zero (o sezione nulla); dato $p \in M$, poniamo $s_0(p) = 0_p \in T_p M$ (il vettore nullo in $T_p M$). Essa è liscia:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \pi_1 & \\ & U & \end{array}$$

(Le frecce rosse s indicano la sezione zero $s(p) = 0_p$.)

Se $S \subset M$, $\pi : E \rightarrow M$ fibrato vettoriale, posso chiamare sezione parziale su S una mappa $s : S \rightarrow E$ tale che $s(p) = p \quad \forall p \in S$. Ogni sezione parziale su un chiuso si estende ad una sezione globale su M , e si può chiedere che l'estensione sia nulla al di fuori di un qualsiasi intorno aperto di S .

Introduciamo ora il fibrato più importante di tutti (o comunque un di quelli che si incontra più spesso, e che ha molte buone proprietà): il fibrato tangente.

Definizione 2.67 - Fibrato Tangente

Data M varietà, il fibrato tangente di M è un fibrato $\pi : TM \rightarrow M$ definito nel seguente modo.

Poniamo $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ con $\pi : T_p M \mapsto p$. Bisogna definire la struttura di varietà, cioè

definiamo un atlante $\mathcal{A}'$: dato

$$\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow V_i\},$$

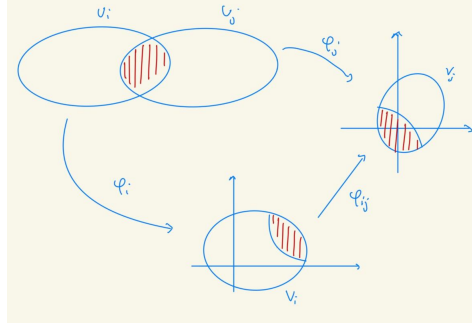
allora poniamo

$$\mathcal{A}' = \{\phi'_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n\},$$

con $\pi^{-1}(U_i) = \bigcup_{p \in U_i} T_p M$,

$$\phi'_i(v) = (\phi_i(\pi(v)), d(\phi_i)_p(v)).$$

Verifichiamo che $\mathcal{A}'$ sia un atlante liscio.



Definiamo $\phi'_{ij} = \phi'_j \circ (\phi'_i)^{-1}$. Sappiamo che le mappe ϕ_i e ϕ_j fanno parte di un atlante per M , quindi $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ è un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$, e inoltre i differenziali di tali carte sono isomorfismi lineari di $\mathbb{R}^n$ in sé stesso (lo spazio tangente di un aperto di $\mathbb{R}^n$ è canonicamente identificato con $\mathbb{R}^n$ stesso). Quindi

$$\phi'_{ij} : \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \quad (x, w) \longmapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), d(\phi_j)_{\phi_i(x)} d(\phi_i)_x(w))$$

è un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^{2n}$.

Osservazione

Se $\dim(M) = n$, allora $\dim(TM) = 2n$, e possiamo pensare ad M immersa in TM identificandola con la sua zero sezione.

Notazione

Indicheremo con $\Gamma E = \{\text{sezioni } E \longrightarrow M\}$. ΓE è uno spazio vettoriale, ed è anche un $C^\infty(M)$ -modulo: data $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma E$, posso definire il prodotto per f come $fs(p) = f(p)s(p)$.

2.3.1 Manipolazioni

Dato $\pi : E \longrightarrow M$ fibrato qualsiasi, possiamo considerare il fibrato duale, ovvero il fibrato dato da $\pi^* : E^* \longrightarrow M$, dove le fibre sono date da $E_p^* := (E_p)^*$, cioè i duali delle fibre. Dobbiamo convincerci che abbia una struttura topologica. Dato $p \in M$, sappiamo che dalla struttura di fibrato esiste un U_p intorno aperto tale che

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_p) & \xrightarrow{\phi} & U_p \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \pi_1 & \\ & U_p & \end{array}$$

Possiamo usare U_p , e notare che vale $(\pi^*)^{-1}(U_p) = \bigcup_{q \in U_p} (E_q)^*$. Usiamo ϕ per definire

$$\bigcup_{q \in U_p} (E_q)^* \longrightarrow U_p \times (\mathbb{R}^k)^* = U_p \times \mathbb{R}^k.$$

Dico che la mappa appena definita è una carta; ho definito in una botta sola l'atlante, che rispetta anche le proprietà di fibrato.

In generale si possono fare tutte le proprietà che si potevano fare sugli spazi vettoriali, come ad esempio la somma di Fibrati. Dati

$$\begin{array}{ccc} E & & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & U_p & \end{array}$$

definisco cioè

$$(E \oplus E')_p = E_p \oplus E'_p$$

(i ranghi si sommano). Si può fare il prodotto tensoriale, definito come

$$(E \otimes E')_p = E_p \otimes E'_p$$

(i ranghi si moltiplicano), e quindi si può costruire $\mathcal{T}_h^k(E)$ con $\mathcal{T}_h^k(E)_p = \mathcal{T}_h^k(E_p)$. Analogamente posso considerare $Hom(E, E')$, dove $Hom(E, E')_p = Hom(E_p, E'_p)$.

Definizione 2.68 - sottofibrato

Dato $\pi : E \longrightarrow M$ fibrato, un sottofibrato è un sottoinsieme $E' \subset E$ tale che $\forall p \in M$ esiste un U_p intorno aperto di p e ϕ tali che

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_p) & \xrightarrow{\phi} & \pi^{-1}(U_p) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U_p & \end{array}$$

e con la proprietà che $\phi(E' \cap \pi^{-1}(U_p)) = U_p \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Deduciamo che E' è quindi una sottovarietà di E , e inoltre $\pi|_{E'} : E' \longrightarrow M$ è un fibrato, con fibre $E' \cap E_p = E'_p$.

Definizione 2.69 - Fibrato quoziente

Dato un sottofibrato $E' \subset E$, posso definire il fibrato quoziente come $(E/E')_p = E_p/E'_p$.

Fino ad adesso M era una varietà fissata, proviamo a vedere come cambia la struttura di fibrato cambiando M .

Definizione 2.70 - Restrizione

Dati $\pi : E \longrightarrow M$ fibrato e $S \subset M$ sottovarietà, se consideriamo $E|_S \xrightarrow{\pi} S$, con $E|_S = \pi^{-1}(S)$, otteniamo quella che si dice restrizione ad S .

Definizione 2.71 - Pullback

Data $f : M \longrightarrow N$ liscia tra varietà, se ho un fibrato sul codominio, posso definire automaticamente un fibrato anche sul dominio, denotato come f^*E in questo modo

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{F} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

f^*E si dice Pullback di E tramite f .

Come vengono definite F e π ?

$$f^*E = \{(p, v) \in M \times E : f(p) = \pi(v)\}.$$

Cioè F e π sono le due proiezioni, ma perché questa costruzione funziona?

Proposizione 2.72

f^*E è una sottovarietà di $M \times E$, e $f^*E \rightarrow M$ è un fibrato. In particolare, il diagramma della definizione precedente commuta.

Dimostrazione. $M \times E$ è in maniera naturale una sottovarietà in quanto prodotto di varietà. Localmente $M \cong \mathbb{R}^n$ e $E \cong \mathbb{R}^m$, cioè posso restringermi al caso

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$f^*E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k : f(x) = \pi(y, z) = y\}$, cioè è localmente grafico di f , ed è quindi una sottovarietà. Il resto è stato lasciato per esercizio (il fatto che sia un fibrato è chiaro, se ci scordiamo della coordinata z). $\square$

Teorema 2.73

Se $f, g : M \rightarrow N$ sono omotope e lisce, allora $f^*E \cong g^*E$.

La dimostrazione non è stata affrontata in quanto, con gli strumenti attuali, sarebbe stata lunga e complicata. Tra un mesetto sarà molto più semplice.

Osservazione

f costante, allora f^*E è banale, cioè $f^*E \cong M \times \mathbb{R}^k$.

Corollario 2.74

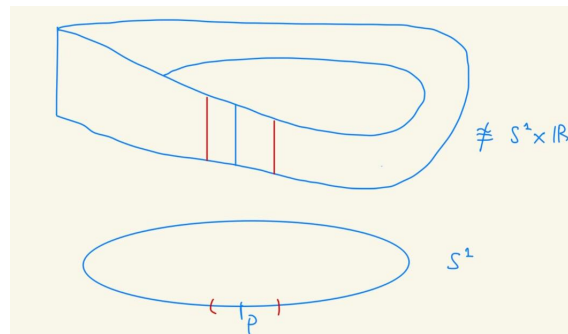
Se M è contraibile, tutti i fibrati su M sono contraibili (in quanto tutte le mappe sono omotopicamente banali).

Dimostrazione. M contraibile $\implies id$ è omotopa ad una costante, quindi $id^*E = E \cong f^*E$ è banale. $\square$

Quindi tutti i fibrati su $\mathbb{R}^n$ sono banali.

Esempio

Consideriamo S^1 e il fibrato dato dal Nastro di Möbius. Esso non è banale in quanto, se lo fosse, sarebbe omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. Un motivo banale per cui non sono omeomorfi è che il nastro di Möbius non è orientabile (in quanto è quoziente di $\mathbb{R}^2$ per un gruppo contenente una glissoriflessione) mentre $S^1 \times \mathbb{R}$ sì.

**Definizione 2.75 - Frame**

$\pi : E \rightarrow M$ fibrato, un Frame è un insieme $\{s_1, \dots, s_k\} \in \Gamma E$ tali che $\{s_1(p), \dots, s_k(p)\}$ sono linearmente indipendenti $\forall p \in M$.

Proposizione 2.76

Un fibrato $\pi : E \longrightarrow M$ è banale se e solo se esiste un Frame.

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni:

- $(\longrightarrow)$

Esiste $F : E \longrightarrow M \times \mathbb{R}^k$ tale che

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & M \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \left. \vphantom{\int} \right\} s_i \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

Pongo allora $s_i(p) = (p, e_i)$.

- $(\longleftarrow)$

Il Frame mi dà un diffeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\phi} & M \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

con $\phi(p, x) = x_1 s_1(p) + \cdots + x_k s_k(p)$.

□

Osservazione

Dato n pari, S^n ha un fibrato non banale. Da GTD sappiamo che con n pari, allora S^n non ammette un campo tangente mai nullo, quindi non riesco a trovare una sezione mai nulla. Con n dispari invece? Dipende, con S^1 abbiamo visto il Nastro di Möbius, ma in generale non è detto (S^3 ammette solo fibrati banali, S^5 no).

Definizione 2.77 - Fibrato cotangente

Preso $TM \longrightarrow M$ il fibrato tangente, il duale $TM^* \longrightarrow M$ si dice fibrato cotangente.

Il fibrato cotangente ha delle proprietà migliori rispetto a quello tangente; per esempio, data

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

funzione liscia, essa induce

$$df_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R},$$

ovvero un elemento nel duale di $T_p M$ (e quindi appartenente a $T_p^* M$). Possiamo quindi interpretare la famiglia dei differenziali

$$\{df_p\}_{p \in M}$$

come una sezione del fibrato cotangente, e chiamarla semplicemente df . Quindi ogni funzione liscia induce una sezione del fibrato cotangente, e questa sarà la base all'idea del differenziale (che vedremo più avanti quando parleremo di forme differenziali).

Osservazione

Quando la varietà su cui lavoriamo è $\mathbb{R}^n$, sia lo spazio tangente che quello cotangente sono canonicamente identificati come $\mathbb{R}^n$ stesso. Questo fa in modo che il differenziale sia semplicemente la mappa

$$p \longmapsto \nabla f(p),$$

ovvero che ad ogni punto associa la valutazione in p del gradiente di f . In generale, però, su una varietà M qualsiasi lo spazio tangente e lo spazio cotangente non sono canonicamente identificati: questo fa sì che il differenziale sia una sezione solo del fibrato cotangente, e non di quello tangente.

Osservazione

Data $f : M \rightarrow N$ liscia, essa induce un morfismo $F : TM \rightarrow TN$ con $F(v) := df_{\pi(v)}(v)$.

Tornando a parlare del fibrato tangente, se consideriamo $N \subset M$ sottovarietà, allora possiamo definire in maniera naturale due fibrati tangenti per N : la restrizione di TM a N , ovvero $TM|_N$, e il fibrato tangente di N come varietà, che denotiamo come TN .

Il secondo è in maniera naturale contenuto nel primo, in quanto gli spazi tangenti sono uno contenuto dentro l'altro ($T_p N \subset T_p M$).

Definizione 2.78 - Fibrato normale

Il fibrato normale di una sottovarietà N è il quoziente

$$\nu N = TM|_N / TN.$$

La prima osservazione interessante è che il fibrato normale νN è una varietà della stessa dimensione della varietà di partenza M . Infatti, se poniamo $m = \dim(M)$ e $n = \dim(N)$, allora

$$\dim(\nu N) = (m - n) + n = m.$$

Questo sarà molto importante quando parleremo di intorni tubolari di sottovarietà.

Esempio

Su una sottovarietà $M \subset \mathbb{R}^n$ possiamo usare il prodotto scalare euclideo per identificare $\nu_p M$ con $T_p M^\perp$. Otteniamo allora la decomposizione ortogonale

$$\mathbb{R}^n = T_p M \oplus \nu_p M,$$

e possiamo quindi reinterpretare il fibrato normale come una sottovarietà

$$\nu M = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in \nu_p M\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Per esempio, se vogliamo prendere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, allora

$$\nu S^n = \{(x, v) : \|x\| = 1, v \in \text{Span}(x)\}.$$

Ora è facile vedere che il fibrato normale di S^n all'interno di $\mathbb{R}^{n+1}$ è banale, in quanto può essere identificato con $S^n \times \mathbb{R}$ tramite la mappa

$$S^n \times \mathbb{R} \rightarrow \nu S^n \quad (x, \lambda) \mapsto (x, \lambda x).$$

Quello che otteniamo è una somma diretta

$$TS^n \oplus \nu S^n = S^n \times \mathbb{R}^{n+1},$$

dove a destra abbiamo un fibrato normale, a sinistra abbiamo νS^n (che abbiamo appena detto essere banale) e TS^n (che però non è detto che sia banale).

Passiamo ora a parlare di fibrati tensoriali: abbiamo detto che, a partire da due fibrati E e E' , possiamo costruire somma e prodotto tensoriale di questi due fibrati. Il caso molto interessante si presenta quando $E = E' = TM$.

Definizione 2.79 - Fibrato tensoriale

Per ogni $h, k \geq 0$ possiamo costruire $\mathcal{T}_h^k(M)$ a partire dal prodotto tensoriale del fibrato tangente e del fibrato cotangente, ovvero

$$\mathcal{T}_h^k(M) = \mathcal{T}_h^k(TM) = \underbrace{T(M) \otimes \cdots \otimes T(M)}_h \otimes \underbrace{T^*(M) \otimes \cdots \otimes T^*(M)}_k.$$

Definizione 2.80 - Campo tensoriale

Una sezione $s \in \Gamma\mathcal{T}_h^k(M)$ si dice campo tensoriale.

I campi tensoriali saranno i protagonisti da ora in avanti: campi vettoriali, forme differenziali, tensori metrici ecc saranno particolari campi tensoriali che studieremo. Vediamo i più importanti:

- un campo tensoriale di tipo $(1, 0)$ (quindi una sezione del campo $\mathcal{T}_0^1(M)$) si dice campo vettoriale, e verranno studiati nella prossima sezione;
- un campo tensoriale di tipo $(0, 1)$ dovrebbe essere chiamato un campo cotangente, ma di solito si usa il termine di 1-forma differenziale.
- un campo tensoriale simmetrico di tipo $(0, 2)$ assegna una forma bilineare simmetrica ad ogni spazio tangente.

Definizione 2.81 - Tensore metrico

$E \rightarrow M$ fibrato, un tensore metrico su E è una sezione $g \in \Gamma\mathcal{T}_2^0(E)$ tale che

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

sia un prodotto scalare. Diciamo che il tensore metrico è definito positivo se lo è il prodotto scalare indotto sugli spazi tangenti.

In parole povere, un tensore metrico è la scelta di un prodotto scalare sugli spazi tangente $T_p M$, che vari in maniera liscia rispetto a p .

Proposizione 2.82

Dato E fibrato, esiste g tensore metrico definito positivo.

Dimostrazione. Usiamo la partizione dell'unità. $\forall p \in M$ esiste U_p aperto banalizzante per E (cioè $\pi^{-1}(U_p) \cong U_p \times \mathbb{R}^k$). Definisco allora s_p sezione di $\mathcal{T}_0^2(E|_{U_p})$. Dati $v, w \in E_q$ con $q \in U_p$, definisco

$$s_p(q)(v, w) = \langle v', w' \rangle \quad \text{dove } \phi_p(v) = (q, v') \text{ e } \phi_p(w) = (q, w').$$

Prendo $\{\rho_p\}_{p \in M}$ partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_p\}_{p \in M}$ e definisco

$$g(q) = \sum_{p \in M} \rho_p(q) g_p(q).$$

L'osservazione chiave è che l'essere definito positivo è preservato dalle combinazioni convesse. Ho quindi definito $g \in \Gamma\mathcal{T}_0^2(E)$. $\square$

Corollario 2.83

$E \cong E^*$.

Dimostrazione. Dato g tensore metrico positivo su E , esso induce

$$E \xrightarrow{\sim} E^* \quad v \mapsto g(v, \cdot).$$

$\square$

Possiamo quindi identificare $\mathcal{T}_h^k(E)$ con $\mathcal{T}_{h+k}^0(E)$.

2.4 Campi Vettoriali

Introduciamo ora una nozione fondamentale che si applica varie volte in topologia fondamentale, ovvero il concetto di campo vettoriale.

Definizione 2.84 - Campo Vettoriale

Un campo vettoriale su M è una sezione $X \in \Gamma TM = \mathfrak{X}(M)$.

L'insieme $\mathfrak{X}(M)$ è un $C^\infty(M)$ -modulo, ovvero data $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiamo fX come $fX(p) = f(p)X(p)$. Definiamo un'altra operazione, che indichiamo come Xf , che identifica la derivazione di f lungo X , ed è definita come $Xf(p) = X(p)(f)$.

Data $f : M \rightarrow N$ liscia, non ho in generale modo di trasportare un campo vettoriale in avanti o indietro. Nel caso invece in cui f è un diffeomorfismo, dato un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ posso definire $f_*X \in \mathfrak{X}(N)$ come

$$f_*X(f(p)) = df_p X(p).$$

In generale, possiamo comunque leggere un campo vettoriale in carte, ovvero dati $X \in \mathfrak{X}(M)$, $U \subset M$ aperto e $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ carta locale, allora ϕ è un diffeomorfismo tra U e V e quindi possiamo applicare il ragionamento appena fatto. Quindi ϕ definisce un campo su V , dato da $\phi_*(X|_U) \in \mathfrak{X}(V)$.

Siccome un generico campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ induce un campo su un aperto di $\mathbb{R}^n$, ci interessa capire come sono fatti, in generale, i campi su $\mathbb{R}^n$. Dato $p \in V \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $X \in \mathfrak{X}(V)$, $X(p) \in T_p M \cong \mathbb{R}^n$ canonicamente, cioè in ogni punto $X(p) = X^i(p)e_i$ (stiamo usando la convenzione di Einstein) è un vettore, ed in generale scriviamo $X = X^i e_i$. Per un motivo di notazione, invece di scrivere e_i scriveremo $\frac{\partial}{\partial x^i}$, o meglio ancora ∂_i .

Possiamo quindi scrivere un generico campo su $\mathbb{R}^n$ come $X = X^i \partial_i$. Questa scrittura ci dice anche come cambiano le coordinate: supponiamo di avere altre coordinate $\bar{X}(x)$. Allora $X = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$; volendo riscrivere tale combinazione rispetto alle coordinate date da $\frac{\partial}{\partial x^i}$, usiamo la relazione data da

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}.$$

Quindi

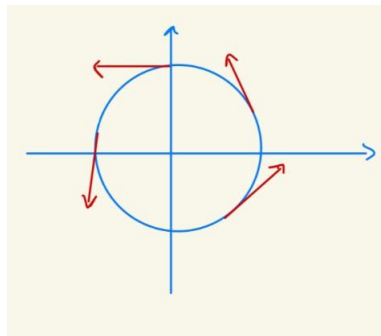
$$X = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = X^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}.$$

Si noti che quando scriviamo $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$, secondo la convenzione di Einstein, stiamo parlando di una matrice (matrice di cambio delle coordinate da una base all'altra).

Esempio

Consideriamo $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ e il campo definito da

$$X(x_1, \dots, x_{2n}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}) \in T_x S^{2n-1} = x^\perp.$$



Definizione 2.85 - Linea integrale

Dato $X \in \mathfrak{X}(M)$, una linea integrale è una curva $\gamma : I \longrightarrow M$, con $I \subset \mathbb{R}$ aperto, tale che $\forall t \in I \quad \gamma'(t) = X(\gamma(t))$.

Esempio

Per il campo visto in precedenza $X \in \mathfrak{X}(S^{2n-1})$, la curva definita da

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\cos(t), \sin(t), \dots, \cos(t), \sin(t))$$

è una linea integrale. Per dimostrarlo, ci basta calcolare

$$\gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}(-\sin(t), \cos(t), \dots, -\sin(t), \cos(t)) = X(\gamma(t)).$$

Proposizione 2.86

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, allora esiste un'unica $\gamma_p : I_p \longrightarrow M$ linea integrale massimale (cioè il cui dominio non può essere ingrandito ulteriormente) tale che $0 \in I_p$ e $\gamma(0) = p$.

Dimostrazione. Letto in carte, diventa un problema di Cauchy, cioè γ è soluzione di

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

Per il Teorema di Esistenza ed Unicità Locale, abbiamo la tesi. Grazie Analisti parte 3 :).

□

2.4.1 Flusso

Arriviamo a descrivere quello che è il flusso di un campo vettoriale: dato un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$, esso definisce un modo di deformare M tramite un "flusso" (nel senso più intuitivo del termine) che muove ogni punto della varietà su una linea integrale. Più in generale, il flusso di campi vettoriali ci permetterà di parlare di isotopie e di isotopie ambiente.

Definizione 2.87 - Flusso

Sia $U \subset M \times \mathbb{R}$ dato da $U = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times I_p$. Il Flusso di $X \in \mathfrak{X}(M)$ è

$$\Phi : U \longrightarrow M \quad (p, t) \longmapsto \gamma_p(t).$$

Quello che, in parole povere, stiamo facendo è: dal teorema di Cauchy-Lipschitz sappiamo che per ogni punto passa una e una sola linea integrale massimale (definita dalla soluzione di un problema di Cauchy, come visto nella Proposizione 2.86), e inoltre sappiamo che tale linea integrale (cioè la soluzione al problema di Cauchy) dipende in maniera liscia dai dati iniziali. Quindi possiamo "raggruppare" tutte le linee integrali che "scorrono" sulla varietà, e ottenere appunto un "flusso del campo" (sempre inteso nel senso intuitivo; da ora in avanti, quando parleremo di flusso di un campo vettoriale, ci riferiremo alla Definizione 2.87).

Ovviamente, le soluzioni massimali di tali problemi di Cauchy non è detto che siano estendibili a tutto il dominio (o meglio, a tutto $\mathbb{R}$); per questo, è utile caratterizzare quei campi per cui ciò accade.

Definizione 2.88 - Campo completo

$X \in \mathfrak{X}(M)$ si dice completo se $I_p = \mathbb{R}$ per ogni $p \in M$.

Esempio

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ è un campo completo su $\mathbb{R}^n$, la linea integrale massimale per $x \in \mathbb{R}^n$ è data da

$$\gamma_x(t) = x + te_i.$$

Per ottenere un esempio di campo non completo, basta prendere lo stesso campo, ma definito su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (infatti la linea massimale che passa per zero non può essere definita su tutto $\mathbb{R}$).

Lemma 2.89

Se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$, allora in realtà $U = M \times \mathbb{R}$ e X è completo.

Dimostrazione. Si usa il principio del vivere in eternità con l'ansia: in ogni punto $p \in M$, I_p contiene almeno un pezzo lungo ε . Cioè, fissata una curva $\gamma_p(t)$, se all'istante t_0 la curva si trova in q , allora essa può essere prolungata almeno di ε , e così facendo si ottiene che $\gamma_p(t)$ può essere prolungata su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

Corollario 2.90

M compatta, $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora X è completo.

Dimostrazione. Se M è compatta, qualsiasi aperto U contenente M conterrà anche una striscia $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. $\square$

Nel caso in cui X sia completo, il flusso $\Phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ è definito $\forall p \in M$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, e quindi possiamo scrivere

$$\Phi_t : M \longrightarrow M \quad p \longmapsto \Phi(p, t).$$

Proposizione 2.91

$\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro, cioè:

- Φ_t è un diffeomorfismo per ogni t .
- $\Phi_0 = id_M$, $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$, $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$.

Dimostrazione. L'unica cosa da dimostrare è che $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$, infatti tutte le altre proprietà derivano da questa. $\square$

2.4.2 Isotopia e Isotopia ambiente

La trattazione appena fatta riguardante il flusso di campi vettoriali e gruppi di diffeomorfismi ad un parametro ci porta in maniera naturale a parlare di isotopia e di isotopia ambiente. Riprendiamo in mano le definizioni principali.

Definizione 2.92 - Omotopia

Date $f, g : M \longrightarrow N$ continue, un'omotopia è una mappa $F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ tale che, posta $F_t : M \longrightarrow N$ $F_t(p) = F(p, t)$, si ha $F_0 = f$ e $F_1 = g$.

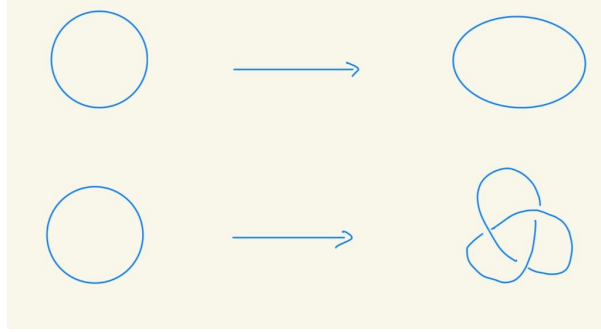
Definizione 2.93 - Isotopia

Dati $f, g : M \longrightarrow N$ embedding, un'isotopia tra f e g è un'omotopia F tra f e g tale che F_t sia un embedding $\forall t$.

Ovviamente un'isotopia è allo stesso tempo un'omotopia, ma non vale il viceversa. Ad esempio, prendiamo

$$f, g : S^0 \rightarrow \mathbb{R} \quad f = id \quad g = -id.$$

f e g sono omotope, in quanto il codominio è contraibile (e quindi tutte le mappe a valori in $\mathbb{R}$ sono omotope tra loro), però non possono essere isotope in quanto un'isotopia "farebbe coincidere i due punti in qualche istante". In questo caso, S^0 è sconnesso, ma esistono anche esempi dove il dominio è connesso, come $f, g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sotto.



Sono omotope per lo stesso motivo di prima ($\mathbb{R}^n$ è contraibile), ma non sono isotope.

Definizione 2.94 - Isotopia ambiente

Un'isotopia ambiente di una varietà N è un'isotopia F tra id e un diffeomorfismo qualsiasi e tale che F_t sia un diffeomorfismo $\forall t$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora Φ_t è un'isotopia ambiente tra $\Phi_0 = id$ e Φ_1 .

Osservazione

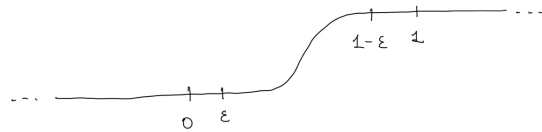
Se $f : M \rightarrow N$ è un embedding e F isotopia ambiente di N , allora posso costruire un'isotopia ambiente tra f e $F_1 \circ f$, ponendo ad esempio $G_t = F_t \circ f$.

Osservazione

Data $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ omotopia liscia o isotopia, posso trasformare F in $G : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tale che

$$G_t = G_0 = f \quad \forall t \leq \varepsilon, \text{ con } \varepsilon < \frac{1}{2}, \text{ e } G_t = G_1 = g \quad \forall t \geq 1 - \varepsilon.$$

Ad esempio, posso prendere ϕ come sotto, e considerare $G(p, t) = F(p, \phi(t))$.



Proposizione 2.95

Essere isotopi/omotopi è una relazione di equivalenza tra funzioni lisce/embedding.

Dimostrazione. L'unica cosa da controllare è la transitività. Si lavora come nel caso delle omotopie viste a Geometria 2, con l'unica eccezione che adesso, quando incolliamo due omotopie tra loro, non è detto che rimangano lisce. Per risolvere questo problema, si modificano F e H come fatto nell'osservazione sopra, che quindi rimangono costanti per un breve periodo all'inizio e alla fine. Quindi la loro giunzione è liscia, cioè è liscia la mappa

$$G(p, t) = \begin{cases} F(p, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(p, 1 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

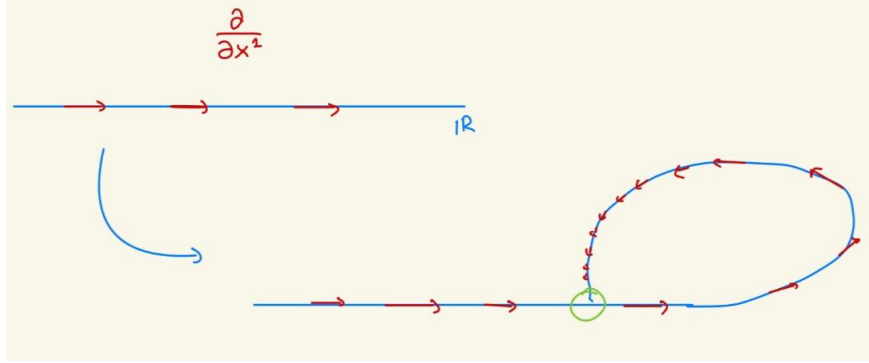
□

Teorema 2.96

$f, g : M \rightarrow N$ embedding isotopi. Se M è compatta, i due embedding sono collegati da un'isotopia ambiente, cioè esiste $G_t : N \rightarrow N$ isotopia ambiente per cui $g = G_1 \circ f$.

Osservazione

Dato $f : M \rightarrow N$ embedding, se ho $X \in \mathfrak{X}(M)$ in che modo riesco a portarlo avanti? Cioè come potrei definire f_*X su $f(M)$. Ponendo $f_*X(f(p)) = df_p(X(p))$ viene effettivamente liscio. In generale, invece, se ho un'immersione iniettiva non è detto che f_*X sia liscio, come l'esempio sotto.



Viene a mancare la continuità nel punto di "tocco"

Dimostrazione. Sia F_t un'isotopia tra f e g , allora $F_t : M \rightarrow N$ è un embedding $\forall t$, ed in particolare posso definire $G : M \times \mathbb{R} \rightarrow (F(p, t), t) = (F_t(p), t)$. Vogliamo vedere che G è un embedding:

- G è iniettiva, in quanto lo sono le F_t . Infatti, F potrebbe essere globalmente non iniettiva, ma G "separa" le varie immagini.
- G è un'immersione. Vale infatti, in generale, che date M e N varietà e $p \in M$ e $q \in N$, allora $T_{(p,q)}M \times N$ è il prodotto $T_pM \times T_qN$. Quindi, considerando $M \times \mathbb{R}$ con $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$, vale che $T_{(p,t)}M \times \mathbb{R} \cong T_pM \times \mathbb{R}$; consideriamo $dG_{(p,t)}$, e osserviamo che

$$dG_{(p,t)} = \begin{bmatrix} d(F_t)_p & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cioè, F_t embedding $\implies d(F_t)_p$ iniettivo $\implies dG_{(p,t)}$ iniettivo, quindi G è un'immersione.

- G è un omeomorfismo con l'immagine: segue dal fatto che M è compatta. In particolare, serve che G sia propria. Sia infatti $K \subset N \times \mathbb{R}$ compatto, quindi $K \subset N \times [-b, b]$ per qualche $b \in \mathbb{R}$, ed in particolare $G^{-1}(K)$, che è un chiuso, è contenuto in $M \times [-b, b]$, che è un compatto. Poiché un chiuso in un compatto è compatto, allora $G^{-1}(K)$ è compatto.

Vogliamo usare G per estendere la deformazione. Sia $X \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ dato da $X = \frac{\partial}{\partial t}$. Chiamiamo $Y = G_*X$, e vogliamo modificarlo ed estenderlo a tutta $N \times \mathbb{R}$:

- Lo consideriamo solo su $B = G(M \times [0, 1])$.
- Lo estendiamo a tutta $N \times \mathbb{R}$ in modo che sia nullo fuori da un aperto U contenente B , e che sia a chiusura compatta.
- Imponiamo che in ogni punto di $N \times \mathbb{R}$ il campo abbia componente verticale costante ed uguale a 1.

Quello che abbiamo fatto è stato di estendere Y nel modo più furbo possibile, cioè al di fuori di U è semplicemente costante e verticale.

Y è completo, cioè mostriamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che ogni linea integrale che passa da un punto (p, t) vive almeno ε secondi (cioè usiamo il Lemma 2.89). Guardiamo in particolare U e la

sua chiusura (che è compatta). Infatti, per compattezza, esiste un ε che funziona $\forall p \in \overline{U}$, e questo stesso ε funziona anche fuori da $\overline{U}$.

Infatti, fuori da $\overline{U}$, la linea integrale è semplicemente una linea verticale; se tale linea interseca in qualche punto $\overline{U}$, allora da lì abbiamo l'esistenza per ε secondi, garantita dalla definizione stessa di ε .

Poiché Y è un campo completo, è ben definito il flusso

$$\Phi : (N \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow N \times \mathbb{R} \quad ((p, t), u) \longmapsto (\psi(p, t, u), t + u).$$

L'isotopia ambiente H che stiamo cercando è del tipo

$$H : N \times \mathbb{R} \longrightarrow N \quad (p, u) \longmapsto \psi(p, 0, u).$$

Questa mappa ψ misura quello che ci serve: preso un punto ad altezza 0, e guardo dove va dopo che sono trascorsi u secondi.

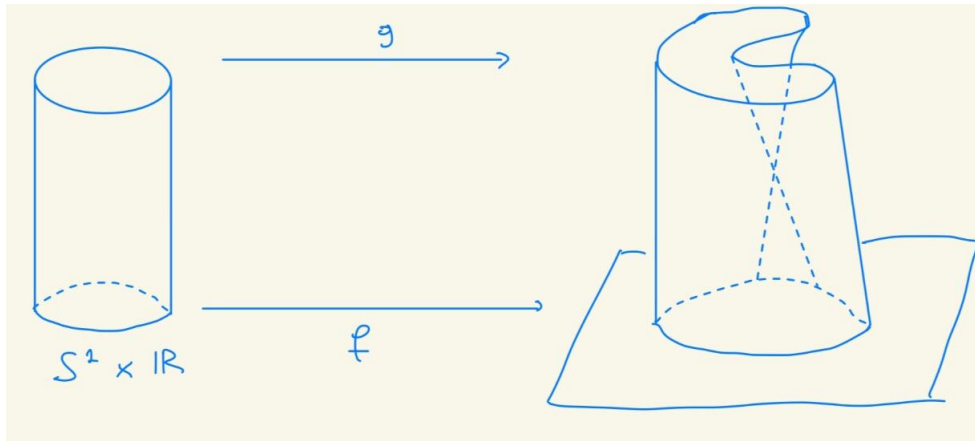
H è isotopia ambiente che collega f e g :

- $H_0 = id$ ($\psi(p, 0, 0) = p$, in quanto dopo che sono passati zero secondi p è ovviamente rimasto fermo).
- H_u è diffeomorfismo $\forall u$, infatti l'inversa è data da H_{-u} .
- $H_1 \circ f = g$; quest'ultimo fatto si vede guardando quello che accade durante l'isotopia. Infatti, era vero fin dall'inizio che G manda linee integrali in linee integrali (cioè quelle di X in quelle di Y).

□

Osservazione

Si può vedere meglio la dimostrazione applicata ad un esempio reale, come ad esempio nel caso sotto di S^1 e dei due embedding f e g in $\mathbb{R}^3$.



Corollario 2.97

f, g embedding isotopi, M compatta, allora f e g sono collegati da una ϕ , che è isotopa all'identità.

In particolare, tale $\phi : \text{Imm}(f) \longrightarrow \text{Imm}(g)$ induce una mappa, che chiamiamo comunque ϕ , tra $M \setminus \text{Imm}(f) \longrightarrow N \setminus \text{Imm}(g)$.

Questo ci dice che il nodo trifoglio (l'embedding non banale di S^1 che abbiamo visto prima) non si scioglie, cioè non è isotopo all'embedding banale. Se quel nodo si sciogliesse, infatti, il complementare del nodo trifoglio dovrebbe deformarsi nello stesso complementare dell'embedding banale. Ma i gruppi fondamentali di questi due complementari sono diversi (uno è $\mathbb{Z}$ e l'altro non è neanche abeliano).

Corollario 2.98

M connessa, allora *M* è omogenea, cioè dati due qualsiasi punti $p, q \in M$, esiste $\phi : M \rightarrow M$ con $\phi(p) = q$, e si può anche scegliere ϕ isotopo all'identità.

Dimostrazione. Se *M* è connessa, allora è anche connessa per archi. Inoltre posso trovare archi lisci che connettono due punti. Voglio quindi usare il teorema di prima: prendo come compatto un punto x_0 , e due funzioni date da

$$f(x_0) = p \quad \text{e} \quad g(x_0) = q.$$

Il cammino γ che connette p a q dà anche un'isotopia tra f e g , e per il teorema di prima essa si estende ad un'isotopia ambiente di *M*. $\square$

2.4.3 Parentesi di Lie

Siano X e Y campi su *M*, vogliamo introdurre un prodotto su $\mathfrak{X}(M)$. Definiamo quindi le parentesi di Lie nel seguente modo:

$$[X, Y](p)(f) = X(p)Yf(p) - Y(p)Xf(p).$$

Ricordiamo che quando scriviamo Xf o Yf stiamo intendendo la derivazione di f lungo il campo X o Y (o meglio lungo il vettore $X(p)$ o $Y(p)$), che è quindi un numero.

Proposizione 2.99

$[X, Y]$ è ben definita, cioè è una derivazione.

Dimostrazione. Il fatto che un'operazione locale e che sia lineare è ovvio dalla definizione. Dimostriamo che vale la regola di Leibniz.

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= XY(fg) - YX(fg) = X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) = \\ &= XY(f)g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fXY(g) - YX(f)g - X(f)Y(g) - Y(f)X(g) - fYX(g) = \\ &= [XY(f) - YX(f)]g + f[XY(g) - YX(g)] = [X, Y](f)g + f[X, Y](g). \end{aligned}$$

$\square$

Notazione

Nonostante la definizione delle parentesi di Lie sia una definizione che dipende dal punto $p \in M$, quello che ci viene voglia di scrivere è una cosa tipo:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Quando scriviamo una cosa del genere, dobbiamo stare attenti al fatto che X e Y sono delle derivazioni.

Proprietà:

- $[\cdot, \cdot]$ è bilineare su $\mathbb{R}$, ma non su $C^\infty(M)$, ovvero $[\lambda X, Y] = \lambda[X, Y]$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, mentre $[fX, Y] \neq f[X, Y]$.
- Dalla definizione si nota che è anche anticommutativo, $[X, Y] = -[Y, X]$.
- Vale l'identità di Jacobi, cioè

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Definizione 2.100 - Algebra di Lie

Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale A con un prodotto $A \times A \longrightarrow A$ che rispetta le tre proprietà scritte qui sopra.

Osservazione

Se $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, allora, dato $Y \in \mathfrak{X}(M)$ qualsiasi, otteniamo

$$[X, Y] = \frac{\partial Y}{\partial x^i}.$$

In particolare, se vogliamo scrivere il prodotto tra due campi in coordinate, allora il risultato è

$$[X, Y]^j = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}.$$

Esempi

Se consideriamo $M_n(\mathbb{R})$ e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, allora si ha $[A, B] = AB - BA$, dove stiamo intendendo il prodotto tra matrici.

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ definisce un campo vettoriale $X_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definito come $X_A(x) = Ax$. Vale che (in maniera contro-intuitiva)

$$[X_A, X_B] = X_{[B, A]} = X_{BA - AB}.$$

Corollario 2.101

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0 \quad \forall i, j.$$

Le parentesi di Lie $[X, Y]$ (anche chiamate bracket) sono quindi un oggetto abbastanza importante, anche perché è definito in modo intrinseco una volta dati X e Y . Questa proprietà è di solito collegata a proprietà funtoriali interessanti: in tal caso, quello che si nota è che il bracket commuta con i diffeomorfismi.

Sia $f : M \longrightarrow N$ un diffeomorfismo tra varietà lisce che manda i campi X_1 e X_2 nei campi Y_1 e Y_2 (abbiamo già visto come, a partire da campi vettoriali su M e un diffeomorfismo tra M e N , sia possibile definire campi vettoriali su N); allora f manda

$$[X_1, X_2] \longmapsto [Y_1, Y_2].$$

Definizione 2.102 - Campi f -correlati

Diciamo che, data $f : M \longrightarrow N$ liscia e $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$, X e Y sono f -correlati se $\forall p \in M$ vale che $df_p(X(p)) = Y(f(p))$.

Osservazione

Possiamo riassumere quello che abbiamo detto fino ad ora: se X_1 è f -correlato ad Y_1 e X_2 è f -correlato ad Y_2 , allora $[X_1, X_2]$ è f -correlato ad $[Y_1, Y_2]$.

Corollario 2.103

$M \subset N$ sottovarietà chiusa, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora possiamo estendere questi due campi a due campi $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ tali che $[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_M = [X, Y]$.

Dimostrazione. Usiamo $\iota : M \longrightarrow N$ e applichiamo l'osservazione precedente. □

Consideriamo due campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e i loro flussi Ψ e Φ . In generale, non è detto che questi due flussi commutino tra di loro, vale a dire che in generale

$$\Psi_t(\Phi_s(p)) \neq \Phi_s(\Psi_t(p)).$$

Vediamo come le parentesi di Lie tra questi due campi riescono a "catturare la non commutatività" dei relativi flussi.

Proposizione 2.104

Dato $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, indichiamo con Φ il flusso di X e con Ψ il flusso di Y (non è detto però che X e Y siano completi; nonostante questo, $\Phi(p, t)$ e $\Psi(p, t)$ sono comunque definiti per un t abbastanza piccolo, l'unica cosa che non vale è che non è detto che esista un t abbastanza piccolo per cui il flusso è definito in ogni punto $p \in V$). Allora vale che

$$\Psi_u(\Phi_t(p)) - \Phi_t(\Psi_u(p)) = [X, Y](p)tu + o(t^2 + u^2).$$

La dimostrazione non viene riportata, in quanto "è solo un contaccio brutto". Dato che le parentesi di Lie ci dicono (almeno al secondo ordine) se i flussi commutano o meno, ci viene naturale dare la seguente definizione.

Definizione 2.105 - Commutatività di Campi

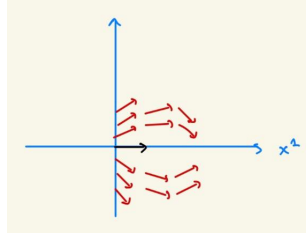
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ commutano quando $[X, Y] \equiv 0 \in \mathfrak{X}(M)$.

Vogliamo ora vedere un risultato che sinteticamente viene descritto come il "raddrizzamento di un campo": dato un campo che non si annulla in un punto $p \in M$, possiamo trovare una carta locale per cui l'immagine del campo è un campo costante, ovvero dritto. In generale, dire che un campo è costante su una varietà non ha senso, in quanto (ancora una volta) non c'è maniera di identificare vettori di spazi tangenti diversi.

Proposizione 2.106

Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ con $X(p) \neq 0$. Allora esiste una carta $\phi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\phi_*X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$ (o comunque uguale ad un campo costante).

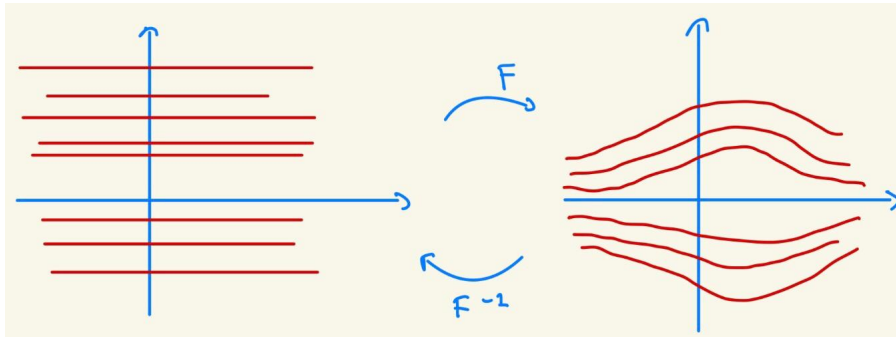
Dimostrazione. Possiamo supporre che $\phi(p) = 0$ e, in generale, lavorare con ϕ_*X (che da ora in avanti verrà semplicemente chiamato X). Possiamo inoltre supporre che $X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}$.



Sia Φ il flusso di X , e consideriamo la mappa F

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{F} \Phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n),$$

che è definita solo quando $\|x\| < \varepsilon$. F mappa le linee orizzontali (quindi relative al campo $\frac{\partial}{\partial x^1}$) nelle linee integrali di X .



Vale inoltre che $dF_0 = id$; infatti, valutando F sull'iperpiano $\{x_1 = 0\}$ otteniamo che $F(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$, cioè agisce come l'identità, e quindi $dF_0 : e_i \mapsto e_i \forall i = 2, \dots, n$. Dove manda e_1 ?

$$dF_0(e_1) = X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1} = e_1.$$

Quindi F è un diffeomorfismo locale nell'origine, e a meno di restringermi in un intorno abbastanza piccolo F è un diffeomorfismo.

La carta cercata è quindi F^{-1} , che per costruzione associa $\frac{\partial}{\partial x^i}$ a X . $\square$

Proposizione 2.107

Due campi X e Y commutano se e solo se i loro flussi commutano localmente, cioè $\forall p \in M$ e $\forall t, u$ piccoli vale che

$$\Phi_t(\Psi_u(p)) = \Psi_u(\Phi_t(p)).$$

Dimostrazione. Vediamo le due implicazioni separatamente:

- ($\leftarrow$)

Deriva direttamente dalla Proposizione 2.104.

- ($\rightarrow$)

Se $X(p) = Y(p) = 0$ è ovvio, in quanto tutti i punti stanno fermi. Se X non è costantemente nullo, allora esiste p tale $X(p) \neq 0$, e per la proposizione di prima possiamo trovare una carta per cui $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Per ipotesi $[X, Y] = 0$, cioè $\frac{\partial Y}{\partial x^1} = 0$. Questo ci dice che il campo Y è invariante per traslazione su e_1 , e quindi

$$\Psi_u(p + te_1) = \Psi_u(p) + te_1.$$

Perciò Ψ_u commuta con Φ_t . $\square$

Cerchiamo di estendere il risultato che abbiamo ottenuto con la Proposizione 2.106 nel caso in cui abbiamo più campi. Nelle ipotesi avevamo che $X(p) \neq 0$, mentre quando abbiamo più campi la giusta generalizzazione è quella di chiedere che i vari campi siano linearmente indipendenti in $p \in M$.

Proposizione 2.108

Siano $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$, e tali che $X_1(p), \dots, X_k(p)$ siano linearmente indipendenti e commutino. Allora esiste una carta $\phi: U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\phi_* X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Dimostrazione. Innanzi tutto, prendiamo una carta per cui $\phi(p) = 0$ e $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x^i} \forall i = 1, \dots, k$, e cerchiamo di fare come prima. Scriviamo la funzione, cioè

$$(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{x^k}^k \circ \dots \circ \Phi_{x^1}^1(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

definita per $\|x\| < \varepsilon$. Vediamo che $dF_0 = id$ (con le stesse motivazioni di prima); infatti

$$dF_0(e_i) = e_i \quad \forall i = k+1, \dots, n,$$

in quanto F agisce come l'identità sul sottospazio $\{x_1 = \dots = x_k = 0\}$, mentre per $i = 1, \dots, k$ vale che $dF_0(e_i) = e_i$ per costruzione. Allora F risulta essere un diffeomorfismo locale, e come prima la carta cercata è data da $\psi = F^{-1}$.

Non abbiamo ancora usato la commutatività degli X_i . Le linee integrali di $\frac{\partial}{\partial x^i}$ vanno nelle linee integrali di X_i tramite F , quindi

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = X_i.$$

Consideriamo il caso $i = k$, cioè $\frac{\partial}{\partial x^k}$, la cui linea integrale è data da $\gamma(t) = x + te_k$. Siccome $\Phi_{x^k}^k$ è l'ultimo ad agire, allora si conclude come nella Proposizione precedente; negli altri casi, uso la commutatività dei campi per riportarmi al caso in cui $\Phi_{x^i}^i$ sia l'ultimo, e quindi è come se fossimo nel caso $i = k$. $\square$

Qual è l'utilità di questo teorema? Supponiamo di avere una varietà M di dimensione n e $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U_p)$, e voglio capire quando questi campi mi danno una carta. Se ho una carta, infatti, allora ho automaticamente n campi coordinati e che commutano, che sono dati dalle immagini $\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. La Proposizione 2.25 mi dice quindi che vale anche la freccia opposta, ovvero che se ho n campi coordinati e che commutano, questi mi derivano proprio da una carta.

2.5 Gruppi di Lie

Possiamo ora introdurre una struttura molto particolare all'interno dello studio della topologia/geometria differenziale, quella di gruppo di Lie. Come vedremo, i gruppi di Lie non sono altro che varietà con una struttura di gruppo; la presenza di un'ulteriore struttura, oltre a quella di varietà, fa sì che tali spazi siano profondamente più ricchi e più interessanti da studiare rispetto alle varietà normali presentate nel capitolo precedente. Infatti, molto dei risultati che riusciamo ad ottenere sono talmente belli e talmente utili che vorremo estenderli alle varietà in generale (e qualche volta ci riusciremo pure).

Definizione 2.109 - Gruppo di Lie

Un gruppo di Lie è una varietà G che è anche un gruppo, e tale che le funzioni

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G & (g, h) &\longmapsto gh \\ G &\longrightarrow G & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sono mappe lisce.

Esempi

I seguenti sono gruppi di Lie:

- Uno spazio vettoriale reale di dimensione finita con l'operazione di somma.
- $GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo con la moltiplicazione. Infatti la moltiplicazione tra matrici è polinomiale rispetto ai coefficienti, cioè è liscia.
- $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ e 1 è valore regolare per l'applicazione $\det$. Inoltre vale che

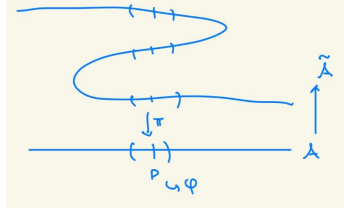
$$T_{Id}SL_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(d(\det)_{Id}) = \{\text{matrici a traccia nulla}\}.$$

- $O(n) = \{AA^T = Id\}$, con $T_{Id}O(n) = \{A^T = -A\} = \{\text{matrici antisimmetriche}\}$.
- S^1 visto come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1, con l'operazione data dalla moltiplicazione.
- $S^3 = \{\text{quaternioni unitari}\}$.
- Affinità di $\mathbb{R}^n$ con l'operazione di composizione. Ogni affinità può essere rappresentata come $f(x) = Ax + b$, con $A \in GL_n(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^n$, quindi il gruppo delle affinità è isomorfo a $GL_n(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$. In particolare, come insieme $Aff(\mathbb{R}^n)$ era già una varietà (in quanto era prodotto di varietà), ma l'operazione di gruppo non è quella classica.

Proposizione 2.110

Data M varietà liscia, allora ogni rivestimento $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ ha (un'unica) struttura liscia che trasforma π in un rivestimento liscio.

Dimostrazione. Vale in generale che se M è una varietà topologica, allora anche $\widetilde{M}$ ha una struttura di varietà topologica. L'unica cosa che andrebbe dimostrata è che $\widetilde{M}$ è a base numerabile; poiché $\widetilde{M}$ riveste M , ci basta dimostrare che $\pi_1(M)$ è al più numerabile (questo è un esercizio di Geometria 2, abbastanza interessante). La struttura liscia di M sale abbastanza facilmente, cioè dato $\mathcal{A}$ atlante per M , posso definire $\widetilde{\mathcal{A}}$ prendendo $\phi \circ \pi$.



□

Proposizione 2.111

G gruppo di Lie, allora il rivestimento universale ha una naturale struttura di gruppo di Lie.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che sono definite le operazioni di gruppo, e che esse sono lisce. Consideriamo quindi la mappa

$$G \times G \longrightarrow G \quad (g, h) \longmapsto gh,$$

e sfruttiamo il fatto che possiamo sollevare mappe qualsiasi al rivestimento universale. Fissiamo $e' \in p^{-1}(e)$ e lo poniamo come elemento neutro. Consideriamo allora il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & \tilde{G} \\ \downarrow p & \nearrow & \downarrow p \\ G \times G & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & G \end{array}$$

La mappa tratteggiata rossa è la mappa di moltiplicazione, per cui possiamo anche chiedere che

$$(e', e') \longmapsto e'.$$

Per l'operazione di inverso ragioniamo alla stessa maniera, sollevando la mappa

$$G \longrightarrow G \quad g \longmapsto g^{-1}.$$

Cioè abbiamo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & \tilde{G} \\ \downarrow p & \nearrow & \downarrow p \\ G & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & G \end{array}$$

e anche qui possiamo richiedere che

$$e' \longmapsto e'.$$

Per far vedere che $\tilde{G}$ è un gruppo con queste operazioni, bisogna usare le proprietà di sollevamento di cammini del rivestimento universale. □

Osservazione/Esercizio/Curiosità

$$\pi_1(SO(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n \geq 3 \end{cases}$$

Definizione 2.112 - Spin(n)

Definiamo Spin(n) il rivestimento universale di $SO(n)$.

Dato G gruppo di Lie, consideriamo lo spazio tangente all'elemento neutro $T_e G$ e lo indichiamo con $\mathfrak{g}$; essa è un'algebra di Lie, e la chiamiamo algebra di Lie associata a G (il fatto che sia un'algebra di Lie non è banale e lo dimostreremo).

Dato $g \in G$, consideriamo L_g la moltiplicazione a sinistra per g , cioè la funzione

$$L_g : G \longrightarrow G \quad h \longmapsto gh.$$

Essa è un diffeomorfismo di G , con inversa $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$. Tale mappa quindi induce

$$d(L_g)_e : T_e G = \mathfrak{g} \longrightarrow T_g G$$

che è un isomorfismo. Facendo variare $g \in G$, abbiamo un'identificazione tra i vari spazi tangenti; per i gruppi di Lie, quindi, abbiamo la possibilità di identificare canonicamente gli spazi tangenti in punti diversi, cosa che non possiamo fare sulle varietà in generale.

Vi è una naturale corrispondenza tra $\mathfrak{g}$ e i campi tangenti a G e invarianti a sinistra, cioè gli $X \in \mathfrak{X}(G)$ tali che $L_{g*}(X) = X \ \forall g$. La corrispondenza è data da

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \{\text{campi invarianti a sinistra}\} \quad v \longmapsto X(g) = d(L_g)_e(v).$$

Devo dimostrare che quello che ho scritto a destra è effettivamente invariante a sinistra. Sia $g' \in G$, e voglio vedere che $X(g'g) = d(L_{g'})_g X(g)$; questo deriva dal fatto che

$$d(L_{g'g})_e(v) = d(L_{g'} \circ L_g)_e(v) = d(L_{g'})_g d(L_g)_e(v),$$

e si conclude in quanto $X(g'g) = d(L_{g'g})_e(v)$ e $d(L_{g'})_g d(L_g)_e(v) = d(L_{g'})_g X(g)$.

Per fare il percorso opposto, invece, basta associare

$$X \longmapsto X(e).$$

Proposizione 2.113

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ sono invarianti a sinistra, allora anche $[X, Y]$ lo è.

Corollario 2.114

$\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie, con il prodotto dato da $[\cdot, \cdot]$.

I campi invarianti a sinistra sono quindi una sottoalgebra di dimensione finita contenuta in $\mathfrak{X}(G)$.

Esempio

Si consideri $G = (\mathbb{R}^n, +)$; vale per tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita (che sono quindi gruppi di Lie) che $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$. Sia $v \in \mathfrak{g}$, e lo vogliamo estendere ad un campo invariante a sinistra. Vale in generale che $T_g \mathbb{R}^n$ è canonicamente identificato con $\mathbb{R}^n$ per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ (chiamiamo g gli elementi di $\mathbb{R}^n$ per sottolineare la struttura di gruppo di Lie) e L_g corrisponde semplicemente ad una traslazione. Il campo associato a v è quindi costante, cioè

$$X_v(x) = v \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

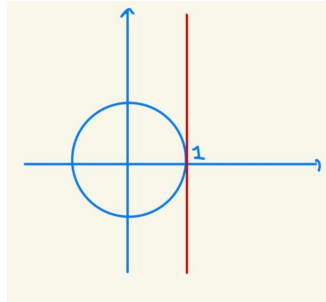
Se quindi abbiamo associato X a v e Y a w , questi campi sono entrambi costanti, e quindi vale che $[X, Y] = 0$, cioè il prodotto è banale in $\mathfrak{g}$.

Osservazione

Siano $v, w \in \mathfrak{g}$, vale che $[v, w] \in \mathfrak{g}$? Sì, infatti $[v, w] = [X, Y](e)$ (dove X è il campo associato a v e Y è il campo associato a w).

Altro esempio

Si consideri S^1 come il sottoinsieme dei vettori unitari in $\mathbb{C}$, con elemento neutro dato da $v = 1$.



Siccome $\mathbb{R}$ è generato da w (un qualsiasi vettore), e il bracket è antisimmetrico, allora

$$[w, w] = 0 \text{ per ogni } w \in T_1 S^1,$$

e quindi anche qui il prodotto è banale. Considerando il toro n -dimensionale, $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. In generale, quando si hanno G e H gruppi di Lie, allora anche $G \times H$ è un gruppo di Lie, con la relativa algebra data dal prodotto delle algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Quindi il toro n -dimensionale ha $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$, anch'esso con il bracket banale.

Ultimo esempio

$GL_n(\mathbb{R})$ ha algebra di Lie data da $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$, che viene indicata come $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Il prodotto, però, in questo caso non è quello banale.

Proposizione 2.115

Date $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, il bracket relativo all'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ è dato da $[A, B] = AB - BA$.

Dimostrazione. L'unica cosa a cui bisogna stare attenti è il segno: infatti, qui è diverso da quando abbiamo presentato il bracket nel caso di campi vettoriali indotti dalle matrici.

Chiamando X_A e X_B i campi indotti dalle matrici A e B , valeva che $[A, B] = BA - AB$. Considerando A invece come elemento $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, A induce un campo $\bar{A}$ invariante a sinistra su $GL_n(\mathbb{R})$ dato da $\bar{A}(x) = d(L_x)I(A) = XA$ (e la moltiplicazione è a sinistra, è per quello che il segno è invertito). $\square$

Definizione 2.116 - Omomorfismo di gruppi di Lie

Un morfismo di gruppi di Lie è una funzione $f : G \rightarrow H$ omomorfismo di gruppi che è anche una funzione liscia.

Proposizione 2.117

Un morfismo di gruppi di Lie induce una mappa $f_ = df_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ che è un omomorfismo di algebre.*

Dimostrazione. L'unica cosa che dobbiamo dimostrare è che f_* rispetta il prodotto, cioè che

$$f_*([v, w]) = [f_*(v), f_*(w)].$$

Si considerino quindi $v, w \in \mathfrak{g}$, che si estendono a X e Y campi invarianti a sinistra, ed in particolare

$$[v, w] = [X, Y](e),$$

e si considerino anche i campi X' e Y' dati da $f_*(v)$ e $f_*(w)$. Osserviamo che X e X' sono f -correlati (e lo stesso vale per Y e Y'), e ci stiamo chiedendo se anche $[X, Y]$ e $[X', Y']$ lo sono. Il punto fondamentale è il fatto che

$$f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f,$$

quindi vale che $X'(f(g)) = dL_{f(g)}(f_*(v))$, in quanto a sinistra abbiamo il differenziale di $f \circ L_g$ e a destra quello di $L_{f(g)} \circ f$. Siccome la stessa formula vale anche per Y , se le applichiamo a $[X', Y']$ e a $[X, Y]$. $\square$

Parliamo ora di sottogruppi di Lie: ci sono due definizioni, che sono leggermente differenti. Presentiamo quella leggermente più generale.

Definizione 2.118 - Sottogruppo di Lie

Dato G gruppo di Lie, allora un sottogruppo di Lie è l'immagine di un morfismo di gruppi di Lie $f : H \rightarrow G$ che sia un'immersione iniettiva.

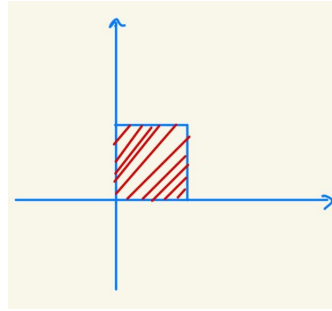
Si noti che non stiamo chiedendo che f sia un embedding. L'altra definizione, che è un po' più restrittiva, è di richiedere che sia esso stesso un gruppo di Lie. La definizione che abbiamo dato è quindi più permissiva, in quanto stiamo ammettendo anche immagini dense.

Osservazione

f immersione ci dice che f_* è iniettiva (in quanto è il differenziale), e quindi $\mathfrak{h}$ si immerge in $\mathfrak{g}$.

Esempi

- $O(n)$ si immerge in $GL_n(\mathbb{R})$, e anche $SL_n(\mathbb{R})$ si immerge in $GL_n(\mathbb{R})$. La conseguenza è che l'algebra $\mathfrak{o}(n)$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, e quindi $\mathfrak{o}(n)$ ha lo stesso bracket. Ricordiamo che $\mathfrak{o}(n) = \{ \text{matrici antisimmetriche, con } [A, B] = AB - BA \}$.
- Si consideri il Toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, gruppo di Lie in quanto prodotto di gruppi di Lie, che grazie alla definizione più generale che abbiamo dato ammette molti sottogruppi di Lie. Infatti, l'iniezione di $\mathbb{R}$ che abbiamo visto un po' di tempo fa, è un sottogruppo di Lie (in quanto immersione iniettiva).



Consideriamo infatti $\lambda \in \mathbb{R}$ e l'applicazione

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \quad t \longmapsto (1, \lambda)t \longmapsto \pi((1, \lambda)t).$$

Tale funzione è un morfismo di gruppi di Lie, chiamiamola f . Quando $\lambda \notin \mathbb{Q}$, f rimane comunque iniettiva, ed è quindi un'immersione iniettiva (che però non è embedding).

2.5.1 Foliazioni e Distribuzioni

In questa sezione andiamo a parlare di foliazioni e distribuzioni. Nonostante vedremo principalmente applicazioni ai gruppi di Lie, esse sono strumenti molto utili anche per varietà differenziabili in generale, in quanto generalizzano (in un opportuno senso) i campi vettoriali.

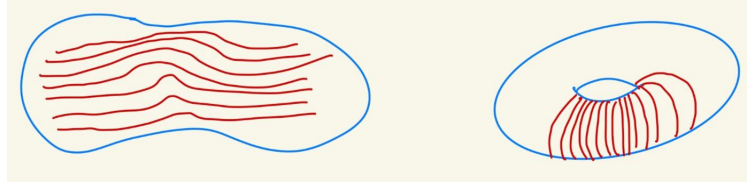
Definizione 2.119 - Foliazione-1

Una k -foliazione su M è una partizione di

$$M = \bigsqcup_{i \in I} \lambda_i$$

(le λ_i si dicono foglie) dove le λ_i sono sottovarietà immerse di dimensione k e tale che $\forall p \in M$ esiste ϕ carta $\phi : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$\phi(\lambda_i \cap U_p) = \mathbb{R}^k \times S \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n.$$



In parole povere, ad ogni punto $p \in M$ esiste una carta ϕ che trasforma la partizione data dalle foglie (che indichiamo anche con $\mathfrak{F}$) in una partizione di $\mathbb{R}^n$ composta da k -sottospazi affini paralleli (cioè della stessa giacitura). Diciamo che ϕ è compatibile con la foliazione.

Osservazione

Una foglia ha sempre misura nulla, quindi per avere una foliazione bisogna avere un insieme più che numerabile di foglie.

Esempi

- Una fibrazione $\pi : E \rightarrow B$ induce una foliazione data dalle fibre $\{E_p : p \in B\}$.
- Il Toro ha una foliazione data da $\{g_a\}_{a \in \mathbb{R}}$, dove g_a è la funzione data da

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2 \quad t \mapsto \lambda(1, t) + a \mapsto \pi(\lambda(1, t) + a), \quad \lambda \notin \mathbb{Q}.$$

Definizione 2.120 - Foliazione-2

Una k -foliazione su M è un atlante $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}\}$ tale che (se condideriamo coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$) le mappe di transizione

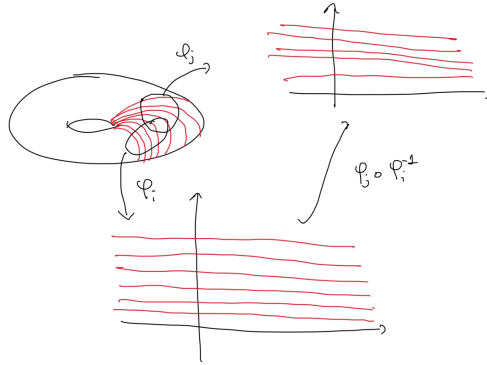
$$\phi_{ij} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \quad \phi_{ij}(x, y) = \left(\phi_{ij}^{(1)}(x, y), \phi_{ij}^{(2)}(y) \right)$$

localmente.

La definizione consiste soprattutto nel notare che il secondo argomento delle funzioni di transizione dipende solo dalla coordinata y (cioè da quella in $\mathbb{R}^{n-k}$).

Come si passa dalla definizione 1 alla definizione 2 e viceversa?

- Per passare dalla prima alla seconda, si consideri $\mathfrak{F} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ l'insieme delle foglie e $\forall p \in M$ sappiamo che esiste $\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Prendiamo come atlante le carte ϕ_p , cioè $\mathcal{A} = \{\phi_p\}$; $\mathcal{A}$ soddisfa le condizioni richieste dalla definizione 2.
- Vediamo solo un'idea.



Per ipotesi, le foglie in partenza vengono mappate nelle foglie in arrivo.

Introduciamo ora l'altro oggetto protagonista di questa sezione: le distribuzioni.

Definizione 2.121 - Distribuzione

Una k -distribuzione su una varietà M è un k -sottofibrato $\mathcal{D} \subset TM$.

Cioè ad ogni $p \in M$ assegniamo un k -sottospazio $\mathcal{D}(p) \subset T_p M$. Osserviamo quindi che se $\mathfrak{F}$ è una foliazione, allora essa identifica automaticamente una distribuzione $\mathcal{D}$; infatti basta prendere $\mathcal{D}(p)$ come lo sottospazio tangente all'unica foglia passante per p .

Proposizione 2.122

Una distribuzione $\mathcal{D}$ viene da una foliazione se e solo se $\mathcal{D}$ è localmente costante, cioè esiste $\phi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ carta locale tale che $\phi_* \mathcal{D}$ è costante e orizzontale, cioè $\forall q \in U_p$ $d\phi_q : \mathcal{D}(q) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Dimostrazione. Dimostriamo la doppia implicazione:

- $(\rightarrow)$
Sia $\mathfrak{F} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ foliazione che induce $\mathcal{D}$. Per ipotesi, $\forall p \in M$ esiste $\phi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ tale che

$$\phi(\lambda_i \cap U) = \mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

$\phi_* \mathcal{D}$ è quindi una foliazione orizzontale.

- $(\leftarrow)$
 $\mathcal{D}$ localmente costante, e devo costruire $\mathfrak{F}$. Prendo come carte $\mathcal{A} = \{\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}\}$. Per ipotesi, $\phi_*(\mathcal{D}|_U)$ è orizzontale, e quindi $\mathcal{A}$ soddisfa le condizioni della definizione 2. La tesi infatti è che la seconda componente di ϕ_{ij} dipenda solo dalla componente y . Ma se

$$d(\phi_{ij})_p : \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \{0\},$$

allora $\phi_{ij}^{(2)}$ dipende solo dalla componente y (sennò il codominio non avrebbe la seconda parte $\{0\}$).

□

Osservazione

I campi vettoriali sono sempre localmente costanti, in quanto per la Proposizione 2.106 possiamo raddrizzarli.

Abbiamo quindi visto un primo legame tra foliazioni e distribuzioni, e il loro legame è in particolare dato da un rapporto di derivazione.

Vogliamo ora spingerci sulla via che connette distribuzioni e foliazioni. In particolare, vogliamo caratterizzare completamente le distribuzioni che "provengono" da una foliazione.

Definizione 2.123 - Distribuzione integrabile

Una distribuzione si dice integrabile se è ottenuta da una foliazione.

Definizione 2.124 - Distribuzione involutiva

Una distribuzione $\mathcal{D}$ è involutiva se $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangenti a $\mathcal{D}$ (cioè tali che $X(p)$ e $Y(p)$ appartengono a $\mathcal{D}(p)$ per ogni $p \in M$) allora anche $[X, Y]$ è tangente a $\mathcal{D}$.

Osservazione

Le due condizioni sono invarianti per diffeomorfismo.

Teorema 2.125 - Frobenius

$\mathcal{D}$ distribuzione è involutiva se e solo se è integrabile.

Dimostrazione. Vediamo la doppia implicazione.

• ($\leftarrow$)

Sappiamo che $\mathcal{D}$ è integrabile se e solo se è localmente costante, quindi supponiamo che $\mathcal{D}$ sia localmente costante e mostriamo che è involutiva. Dato $p \in M$, esiste

$$\phi : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \text{ per cui } \phi_* \mathcal{D} = \mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

Per ipotesi ho quindi due campi X e Y in M tangenti a $\mathcal{D}$, e voglio dimostrare che anche il loro bracket $[X, Y]$ lo è.

Considero quindi $X|_U$ e $Y|_U$ e li guardo in carte (li chiamo comunque X e Y), e la tesi diventa quindi che $[X, Y]$ sia tangente a $\mathcal{D}$, che è ora identificato con $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Scrivo

$$X = \sum_{i=1}^k X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{i=1}^k Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

e devo far vedere che se $i > k$ allora $[X, Y]^i = 0$. Ma infatti

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} = 0,$$

in quanto X^i e Y^i sono nulli.

• ($\rightarrow$)

Sia $p \in M$ e cerco una carta che raddrizzi $\mathcal{D}$; in particolare posso prendere una carta ϕ tale che $\phi(p) = 0$ e $\mathcal{D}(p)$ venga mappato in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Prendiamo U_p un intorno abbastanza piccolo di p per cui valga che, posto $W = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$, allora $\mathcal{D}(q) \oplus W = \mathbb{R}^n \quad \forall q \in U_p$. Chiamo X_1 la componente tangente a $\mathcal{D}$ ottenuta proiettando $\mathcal{D}$ su $\frac{\partial}{\partial x^1}$, cioè

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{i=k+1}^n X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Allo stesso modo

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=k+1}^n X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

per ogni $j = 1, \dots, k$. Segue quindi che

$$[X_j, X_l] = \left[\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=k+1}^n X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{i=k+1}^n X_l^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right],$$

con $1 \leq j, l \leq k$. Vorremmo far vedere che, se $1 \leq a \leq k$, allora $[X_j, X_l]^a = 0$, ma questo segue direttamente dal fatto che

$$[X_j, X_l]^a = X_j^i \frac{\partial X_l^a}{\partial x^i} - X_l^i \frac{\partial X_j^a}{\partial x^i},$$

e X_j^a e X_l^a sono costanti. Quello che abbiamo dimostrato è che il bracket tali campi è tangente allo spazio W (infatti le prime k coordinate sono nulle). Ma avevamo preso i due campi come proiezione dei campi $\frac{\partial}{\partial x^i}$ con $i = 1, \dots, k$, e $\mathcal{D}$ è involutiva per ipotesi. Questo ci dice che, siccome il bracket deve essere tangente sia a W che a $\mathcal{D}$, allora

$$[X_j, X_l] = 0 \quad \forall 1 \leq j, l \leq k.$$

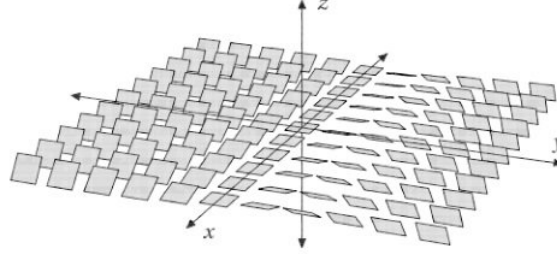
Siccome abbiamo trovato k campi che commutano, per il raddrizzamento simultaneo (Proposizione 2.108), posso trovare una carta dove tali campi sono orizzontali. Quindi posso raddrizzare localmente $\mathcal{D}$, ed è quindi integrabile.

□

Esempio - Distribuzione non integrabile

Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z) , $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$, quindi

$$[X, Y] = \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial X_2}{\partial y} + x \frac{\partial X_3}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z}.$$



(scusate ma questo non lo sapevo disegnare, l'immagine è presa da "Manifolds" di Martelli)

Definizione 2.126

G gruppo di Lie, chiamiamo G^0 la componente connessa di G che contiene l'elemento neutro.

Di solito i gruppi di Lie sono sconnessi. Ad esempio, $O(n)$ ha due componenti connesse, e vale che $O^0(n) = SO(n)$.

Proposizione 2.127

G^0 è un sottogruppo normale di G .

Dimostrazione. Dati $g, h \in G^0$, possiamo vedere gh come $L_g(h)$. $L_g : G \rightarrow G$ è un diffeomorfismo che permuta le componenti connesse di G . In particolare, $L_g(G^0) = G^0$, in quanto $L_g(e) = g \in G^0$, e quindi la componente connessa rimane G^0 . Quindi $gh \in G^0$. Lo stesso ragionamento si applica per l'applicazione $g \mapsto g^{-1}$, che è un diffeomorfismo e manda e in sé stesso. Quindi anche $g^{-1} \in G^0$.

Siano ora $g \in G^0$ e $h \in G$ qualunque. Chiamiamo C_h la mappa di coniugio per h , cioè

$$C_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto hgh^{-1}.$$

La mappa C_h è un isomorfismo di gruppi di Lie, quindi manda componenti connesse in componenti connesse; ci basta capire quindi dove viene mandato G^0 , e lo possiamo fare notando semplicemente che $C_h(e) = e \in G^0$. $\square$

Lemma 2.128

M varietà, $\mathcal{D}$ distribuzione su M , $X_1, \dots, X_k$ frame per $\mathcal{D}$. Allora $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se $[X_i, X_j]$ sono tangenti a $\mathcal{D} \forall i, j$.

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni:

- $(\rightarrow)$
Ovvio, in quanto $\mathcal{D}$ involutiva.
- $(\leftarrow)$
Prendiamo due qualsiasi campi X e Y tangenti a $\mathcal{D}$ e vogliamo dimostrare che il loro bracket è tangente a $\mathcal{D}$ (definizione di distribuzione involutiva). Scriviamo tali campi rispetto al frame dato dagli X_i , cioè

$$X = f^i X_i \quad Y = g^j X_j.$$

Vediamo come si comporta il bracket:

$$[X, Y] = [f^i X_i, g^j X_j] = \underbrace{f^i g^j [X_i, X_j]}_{(*)} + f^i (X_i g^j) X_j - g^j (X_j f^i) X_i.$$

Il passaggio (*) è stato lasciato come esercizio delle consegne (e comunque è uno degli esercizi risolti dell'ultimo capitolo). Si conclude in quanto abbiamo scritto $[X, Y]$ come somma di cose tangenti a $\mathcal{D}$ (X_i, X_j e $[X_i, X_j]$).

□

Teorema 2.129

G gruppo di Lie, allora per ogni $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ sottoalgebra, allora esiste un unico H sottogruppo di Lie connesso di G con algebra di Lie proprio $\mathfrak{h}$.

Dimostrazione. Esistenza: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = T_e G$, quindi $\mathfrak{h}$ rappresenta una distribuzione data da $\mathcal{D}(g) = d(L_g)_e(\mathfrak{h}) \forall g \in G$. Vediamo che:

- $\mathcal{D}$ è involutiva. Costruiamo un frame: Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base per $\mathfrak{h}$ e la estendiamo a $X_1, \dots, X_k$ campi invarianti a sinistra. Questi campi danno il frame, e basta dimostrare che $[X_i, X_j]$ è ancora tangente a $\mathcal{D}$ (per il Lemma). Ma questo deriva dal fatto che $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$, cioè è chiusa rispetto al prodotto.
- Per il Teorema di Frobenius, allora $\mathcal{D}$ è anche integrabile, quindi esiste $\mathfrak{F}$ foliazione a cui $\mathcal{D}$ è tangente (che è anche unica); poniamo $\mathfrak{F} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$. Prendiamo H come la foglia che contiene e .

La nostra tesi consiste nel dimostrare che H sia un sottogruppo; se riusciamo a dimostrarlo, allora per costruzione H avrà come algebra $\mathfrak{h}$. Siano $g, h \in H$, e in particolare vale che $L_g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, cioè L_g è un automorfismo della distribuzione, e preserva la foliazione. Quindi $L_g(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, e quindi H è un sottogruppo. Si conclude come nella dimostrazione di G^0 . □

Osservazione

H è normale se e solo se $\mathfrak{h}$ è ideale. Infatti, per essere normale H deve essere chiuso per coniugio, e il coniugio ha anche la moltiplicazione a destra. In generale, non è detto che $\mathfrak{h}$ sia invariante a destra.

Osservazione

H è un sottogruppo per la definizione più permissiva che abbiamo dato di sottogruppo di Lie, cioè come immersione iniettiva. In generale, non c'è nessuna ragione affinché il sottogruppo H associato ad una qualsiasi sotto-algebra $\mathfrak{h}$ sia embedded, e non è facile neanche capire quando lo è a partire da come è fatta $\mathfrak{h}$.

Questo è uno dei motivi per il quale abbiamo dato la "definizione più permissiva" per i sottogruppi di Lie: se avessimo usato la definizione embedded, il Teorema 2.129 non sarebbe stato vero.

Esempio

Consideriamo il Toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e l'algebra $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$. All'interno di $\mathfrak{g}$ consideriamo $\mathfrak{h}$ una copia di $\mathbb{R}$, cioè una retta, e per il Teorema sappiamo che esiste un sottogruppo di $\mathbb{T}^2$ che realizza tale sotto-algebra. Se la pendenza di tale retta è razionale, allora il sottogruppo relativo è compatto; se la pendenza non è razionale, allora è denso.

Esempio

I sottogruppi connessi di $SO(3)$ (non banali) sono dati dalle rotazioni attorno ad un asse, e sono quindi diffeomorfi ad S^1 . In particolare, non esistono sottogruppi di $SO(3)$ di dimensione 2.

2.5.2 Mappa esponenziale

Sia G un gruppo di Lie. Dato $v \in \mathfrak{g}$, lo posso estendere ad un campo invariante a sinistra $X \in \mathfrak{X}(G)$.

Proposizione 2.130

X è un campo completo.

Dimostrazione. So che, puntualmente, $\forall g \in G$ esiste γ_g linea integrale massimale, dove $\gamma_g : I_g \rightarrow G$. Se riesco a dimostrare che il dominio non dipende da g , allora ho la tesi. Ma questo segue direttamente dal fatto che

$$\gamma_g = L_g \circ \gamma_e \implies I_g = I_e.$$

□

Dato un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$, indichiamo con Φ_t^X il flusso di X .

Definizione 2.131 - Mappa esponenziale

Preso $v \in \mathfrak{g}$, prendiamo X il relativo campo invariante a sinistra. Definiamo la mappa esponenziale come

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad v \mapsto \Phi_1^X(e).$$

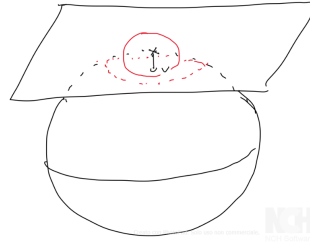
Osservazione

Se considero λv , il campo associato sarà λX , al posto di X . I flussi sono quindi simili, ed in particolare vale che $\Phi_t^{\lambda X} = \Phi_{\lambda t}^X$; cioè le linee integrali sono le stesse, ma percorse ad una velocità diversa. Quello che è veramente interessante è che possiamo definire, fissato $v \in \mathfrak{g}$, una mappa

$$t \mapsto \Phi_t^X(e)$$

e quindi

$$\gamma_v(t) = \Phi_t^X(e) = \Phi_1^{tX}(e) = \exp(tv).$$



Cioè la mappa esponenziale manda rette passanti per l'origine in linee integrali.

$d\exp_0 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è un endomorfismo, e in particolare vale che $d\exp_0 = id$; infatti esso mappa v (inteso come vettore di una retta passante per l'origine) in v (inteso come vettore del campo tangente). Quindi $\exp$ risulta essere un diffeomorfismo locale, cioè mappa intorno dell'origine in G , e si può parametrizzare un intorno di e in G tramite un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$.

Se $f : G \rightarrow H$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, allora il diagramma seguente commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

Nel caso in cui $H < G$, allora la mappa esponenziale

$$\mathfrak{h} \rightarrow H$$

altro non è che la restrizione della mappa esponenziale

$$\mathfrak{g} \rightarrow G.$$

Esercizio

Dimostrare che

$$\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \quad A \longrightarrow e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

(nota che questo non è un omomorfismo di gruppi). Ed è per questo che viene chiamata mappa "esponenziale".

Osservazione

Non è detto che $\exp$ sia surgettiva. Si consideri ad esempio il caso

$$\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R});$$

se $g = \exp(A)$, allora ammette come "radice quadrata"

$$\sqrt{g} = \exp\left(\frac{A}{2}\right).$$

Se consideriamo come matrice

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

B non ammette radice quadrata (esercizio di G1), e quindi B non può appartenere all'immagine della mappa esponenziale. Un altro esempio è dato da

$$\mathfrak{so}(n) \longrightarrow SO(n).$$

2.6 Ultime cose

Ci rimangono due cose da introdurre prima di poter passare al prossimo capitolo: gli intorni tubolari e la somma connessa di varietà. Parliamone brevemente.

2.6.1 Intorno tubolare

Cominciamo introducendo gli intorni tubolari. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Tra tutti gli intorni aperti che contengono un dato punto $p \in M$, i più belli con cui lavorare sono certamente quelli diffeomorfi ad $\mathbb{R}^m$ (e infatti abbiamo più volte usato gli atlanti adeguati). Essi non sono certamente unici, e non c'è possibilità di sceglierne uno "preferito". Nonostante ciò, dimostreremo che essi sono unici se considerati a meno di isotopia. Inoltre, dimostreremo che per ogni sottovarietà $N \subset M$ ammette una sorta di "intorno bello", chiamato *intorno tubolare*. L'idea da cui partiamo è quella che una curva (o un nodo) in $\mathbb{R}^3$, l'intorno tubolare debba appunto essere una sorta di "tubo" (topologicamente chiediamo che sia un aperto) che stia attorno alla curva.

Definizione 2.132 - Intorno tubolare

Data M m -varietà e $N \subset M$ sottovarietà n -dimensionale, un intorno tubolare per N in M è un aperto U che contiene N con una struttura di fibrato di cui N è la zero-sezione.

Una definizione equivalente è la seguente: un intorno tubolare è un fibrato vettoriale

$$E \longrightarrow N$$

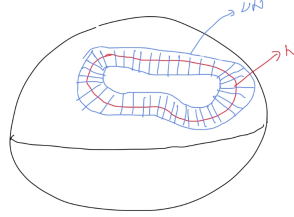
(sempre $N \subset M$ sottovarietà n -dimensionale) con un embedding

$$\iota : E \longrightarrow M$$

tale che l'immagine sia un aperto e sia l'identità sulla zero sezione, cioè $\iota|_N = id_N$.

Quello che vogliamo dimostrare in questa sezione è che ogni sottovarietà ammette un intorno tubolare, e che tale intorno tubolare è dato da un embedding del fibrato normale nella varietà M . Ricordiamo che il fibrato normale di N rispetto a M è un fibrato vettoriale che ha come fibre

$$(\nu N)_p = T_p M / T_p N.$$



Osservazione

Sia $f : X \longrightarrow Y$ liscia tra due varietà, $S \subset X$ sottovarietà e supponiamo che:

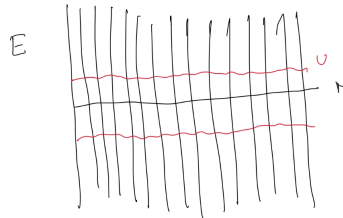
- $f|_S$ è un embedding;
- per ogni $p \in S$, df_p è iniettivo (f è immersione come mappa da X in Y).

Allora esiste U intorno aperto di S tale che $f|_U$ è un embedding.

Lemma 2.133 - Lemma di strizzamento

Prendiamo $E \longrightarrow M$ fibrato vettoriale, e identifichiamo M come la zero sezione. Sia $M \subset U \subset E$ aperto qualsiasi, allora esiste $\phi : E \longrightarrow U$ tale che

- $\phi|_M = id_M$;
- $\phi(E_p) \subset E_p$ per ogni $p \in M$.



Dimostrazione. Dotiamo E di una metrica Riemanniana (scegliamo un tensore metrico definito positivo). Il nostro claim è che esista

$$r : M \longrightarrow (0, +\infty)$$

liscia e tale che $B(0, r(p)) \subset E_p$ sia contenuto in U (questo U è quello dell'enunciato). Localmente è vero, e uso una partizione dell'unità per estendere le funzioni locali a tutta M .

So che, localmente, per ogni $p \in M$ esiste U_p aperto che lo contiene (e a chiusura compatta) e tale che esiste $\varepsilon_p > 0$ per cui tutto il rettangolo dato da

$$\{v \in E_q : q \in U_p, \|v\| < \varepsilon_p\}$$

sia contenuto in U . Prendiamo

$$\phi(v) = r(\pi(v)) \frac{v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}},$$

che è la mappa cercata. □

Teorema 2.134

Data N sottovarietà n -dimensionale di M , esiste un intorno tubolare con $E \cong \nu N$.

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi in due passi:

1. supponiamo prima che $M = \mathbb{R}^m$, e possiamo identificare

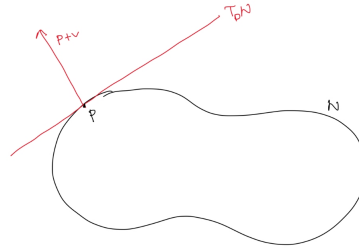
$$\nu N = \bigcup_{p \in N} \{\nu_p N\} = \bigcup_{p \in N} T_p M / T_p N = \bigcup_{p \in N} T_p N^\perp.$$

In questo caso $T_p M = \mathbb{R}^m$ e posso usare il prodotto scalare standard per identificare il quoziente con l'ortogonale, nel caso di varietà qualsiasi devo scegliere un tensore metrico. In realtà, possiamo identificare

$$\nu N = \{(p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : p \in N \text{ e } v \in T_p N^\perp\}.$$

Prendiamo

$$f : \nu N \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (p, v) \longmapsto p + v.$$



Osserviamo che $f|_N = id_N$. Dato $p \in N$, abbiamo

$$T_{(p,0)} \nu N = T_p N \times \nu_p N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Identificando $T_p N \times \nu_p N$ con $\mathbb{R}^m$, scopriamo che $df_{(p,0)}$ è l'identità: f è lineare, quindi coincide con il suo differenziale, cioè $df_{(p,0)} = f$, che per definizione è proprio l'identità (in quanto $f(p, 0) = p + 0 = p$).

In particolare, il differenziale è invertibile, rendendo f un'immersione ad ogni punto su N . Per l'osservazione di prima, siccome $f|_N$ è un embedding (è proprio l'identità su N) ed è un'immersione per ogni suo punto, allora esiste un intorno U di N in νN tale che $f|_U$ è un embedding.

Per concludere, basta usare il Lemma di strizzamento (Lemma 2.133) per ottenere

$$\phi : \nu N \longrightarrow U$$

tale che $\phi|_N = id_N$, e comporla con f .

2. Vediamo il caso in cui M sia una varietà qualsiasi. L'idea di base è la stessa, cioè usare la funzione $f(p, v) = p + v$, solo che ora usiamo un risultato in più: il teorema di embedding di Whitney. Possiamo infatti immergere (immergere nel senso embedding) M in qualche $\mathbb{R}^k$, e ora per ogni p abbiamo le inclusioni

$$T_p N \subset T_p M \subset \mathbb{R}^k.$$

Identifichiamo (come prima) $\nu_p N$ come l'ortogonale di $T_p N$ all'interno di $T_p M$, e consideriamo la mappa

$$F : \nu N \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad (p, v) \longmapsto p + v.$$

Sia W un intorno tubolare di M in $\mathbb{R}^k$ (esistenza assicurata dal punto 1) con la struttura di fibrato normale

$$\pi : W \longrightarrow M;$$

posto $U = F^{-1}(W)$, definiamo

$$f : U \longrightarrow M \quad (p, v) \longmapsto \pi(p + v).$$

Come prima, il differenziale in N è l'identità, e concludiamo che $f \circ \phi$ è un intorno tubolare di N , per ϕ data sempre dal Lemma di strizzamento.

□

Nonostante la definizione generale di intorno tubolare, l'intorno tubolare di una sottovarietà è unico, se considerato a meno di isotopia. Specifichiamo cosa intendiamo con "a meno di isotopia": sia M una varietà e $N \subset M$ una sottovarietà. Due intorni tubolari

$$\phi^0 : E^0 \longrightarrow M \quad \text{e} \quad \phi^1 : E^1 \longrightarrow M$$

si dicono isotopi se esiste un isomorfismo di fibrati

$$\psi : E^0 \longrightarrow E^1$$

e un'isotopia F da ϕ^0 a $\phi^1 \circ \psi$ che fissa N puntualmente, cioè $F(p, t) = p$ per ogni $p \in N$ e per ogni t . Si noti che ogni embedding $F_t = F(\cdot, t)$ descrive un intorno tubolare di N , e quindi F descrive un "cammino liscio di intorni tubolari di N ".

Teorema 2.135

Sia $N \subset M$ sottovarietà. L'intorno tubolare di N è unico a meno di isotopia.

La dimostrazione è simile a quella che dice che qualsiasi diffeomorfismo

$$\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

che fissa l'origine (o un qualsiasi punto) è isotopo ad un isomorfismo lineare (in particolare, al suo differenziale nel punto fissato).

Corollario 2.136

Ogni intorno tubolare di N è isomorfo al suo fibrato normale.

Proposizione 2.137

Sia M varietà orientabile di dimensione m e $N \subset M$ sottovarietà di dimensione $m-1$. Allora νN è banale se e solo se N è orientabile.

Dimostrazione. Fissiamo un'orientazione per M . Il fibrato normale è, in particolare, un fibrato vettoriale, ed è quindi banale se e solo se ammette una sezione mai nulla. Dimostriamo la doppia implicazione:

- ($\longleftarrow$)
Se N è orientabile, fissiamo un'orientazione su N . Le due orientazioni di M e di N inducono un'orientazione locale coerente sulle fibre di νN , ovvero su $\nu_p N$ per ogni p , che distingue tra vettori normali "positivi" e "negativi". Fissiamo un tensore metrico su νN , e prendiamo tutti i vettori positivi di norma 1 (ricordiamo che νN ha fibre di dimensione 1 nelle ipotesi in cui siamo): essi formano una sezione mai nulla.
- ($\longleftarrow$)
Se il fibrato normale è banale, allora l'orientazione di M e l'orientazione normale inducono su N un'orientazione.

□

Combinando l'esistenza di intorni tubolari con il teorema di Embedding di Whitney, possiamo ora dimostrare che ogni mappa continua tra due varietà lisce è omotopa ad una mappa liscia.

Teorema 2.138

Siano M e N due varietà lisce, e $f : M \rightarrow N$ funzione continua, possibilmente liscia su un chiuso $S \subset M$. Allora esiste $g : M \rightarrow N$ liscia tale che $f(s) = g(s)$ per ogni $s \in S$ e f è omotopa a g , con un'omotopia che è costante su S .

Dimostrazione. Dal Teorema di Embedding di Whitney possiamo supporre che $N \subset \mathbb{R}^n$ per qualche n , e prendiamo νN l'intorno tubolare. Per ogni $p \in N$ sia $r(p)$ la distanza di p dal bordo di νN (che è un insieme aperto).

Abbiamo già dimostrato che, per mappe continue a valori in qualche $\mathbb{R}^n$, allora esiste $h : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia e tale che

$$\|h(p) - f(p)\| < r(f(p)),$$

con anche $h(p) = f(p)$ per ogni $p \in S$. L'omotopia

$$H(p, t) = (1 - t)f(p) + th(p)$$

giace interamente in νN , e può essere quindi composta con la proiezione

$$\pi : \nu N \rightarrow N$$

per ottenere l'omotopia cercata tra f e $g = \pi \circ h$. □

Corollario 2.139

$f, g : M \rightarrow N$ lisce e omotope (in senso continuo), allora f e g sono anche lisciamente omotope.

Dimostrazione. Sia

$$F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$$

con $F_0 = f$ e $F_1 = g$. F è continua su tutto $M \times \mathbb{R}$ ed è liscia su $S = M \times \{0, 1\}$; per il Teorema 2.138, F è omotopa ad una

$$G : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$$

liscia, con $G|_S = F|_S$. Ho quindi trovato un'omotopia liscia. □

Abbiamo quindi dimostrato che ogni omotopia continua è omotopa ad un'omotopia liscia. Possiamo chiederci se lo stesso vale con le isotopie. La risposta è negativa: si consideri il disegno qui sotto.



Abbiamo che

$$F_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

è un embedding per ogni t , ma

$$F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

non è liscia e non può essere omotopa ad un'isotopia liscia (non è liscia nel tempo).

2.6.2 Somma connessa

Arriviamo ora a parlare della somma connessa di varietà, che (come dice il nome) serve ad "incollare" due varietà della stessa dimensione attraverso una sorta di tubo.

Siano M_1 e M_2 due n -varietà connesse e orientabili. Vogliamo definire la somma connessa di M_1 e M_2 , che denoteremo come $M_1 \# M_2$. Per farlo, introduciamo la mappa

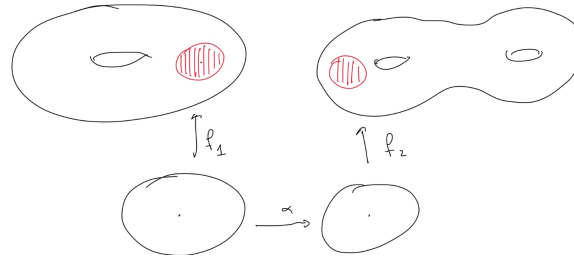
$$\alpha : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \quad v \longmapsto (1 - \|v\|) \frac{v}{\|v\|},$$

diffeomorfismo di $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ in sé stesso che ribalta l'orientazione. Inoltre, consideriamo due embedding

$$f_1 : \mathbb{D}^n \longrightarrow \text{int}(M_1) \quad \text{e} \quad f_2 : \mathbb{D}^n \longrightarrow \text{int}(M_2)$$

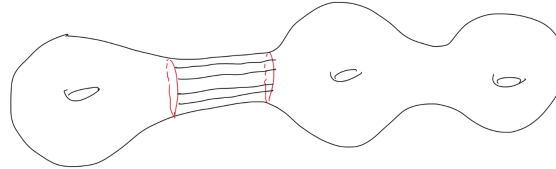
(ricordiamo che $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1\}$) tali che f_1 preservi l'orientazione, mentre f_2 la ribalti. Ora, incolliamo le varietà bucate $M_1 \setminus f_1(0)$ e $M_2 \setminus f_2(0)$ tramite il diffeomorfismo

$$f_2 \circ \alpha \circ f_1^{-1} : f_1(\text{int}(\mathbb{D}^n) \setminus \{0\}) \longrightarrow f_2(\text{int}(\mathbb{D}^n) \setminus \{0\}).$$



Definizione 2.140 - Somma connessa

La varietà risultante da tale operazione si dice somma connessa di M_1 e M_2 e si indica con $M_1 \# M_2$.



Dato che la mappa $f_2 \circ \alpha \circ f_1^{-1}$ preserva l'orientazione, allora la somma connessa è in maniera naturale orientata. Inoltre, la somma connessa non dipende dalle scelte fatte per f_1 e f_2 .

Teorema 2.141

Le n -varietà lisce (a meno di diffeomorfismo) formano un monoide commutativo con l'operazione di somma connesso, ovvero

- $M \# N \cong N \# M$;
- $(M \# N) \# P \cong M \# (N \# P)$;
- S^n è l'elemento neutro, $M \# S^n \cong M$.

Esempi

Vediamo qualche esempio. Siccome le 1-varietà non sono molto interessanti, consideriamo le superfici, in particolari quelle compatte:

$$S^2 \quad \mathbb{P}^2\mathbb{R} \quad S^1 \times S^1 \quad K$$

(dove K indica la bottiglia di Klein). Possiamo aggiungerne altre?

Definizione 2.142 - Superficie di genere g

Definiamo la superficie chiusa di genere g , e la indichiamo con S_g , come

$$S_g = \underbrace{T \# \dots \# T}_g,$$

dove T indica il toro $S^1 \times S^1$.

Per convenzione poniamo $S_0 := S^2$ e $S_1 = T = S^1 \times S^1$. Abbiamo che

$$S_g \# S_h \cong S_{g+h}.$$

Teorema 2.143 - Classificazione delle superfici

Ogni superficie connessa, compatta, orientabile e senza bordo è diffeomorfa ad una superficie S_g per qualche g .

Forme differenziali e Coomologia di De Rham

3.1 Varietà con bordo

Introduciamo ora una variazione alla definizione di Varietà che abbiamo dato nel primo capitolo. Le varietà con bordo sono spazi topologici modellati su $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Definizione 3.1 - $\mathbb{R}_+^n$ -carta e $\mathbb{R}_+^n$ -atlante

Dato M spazio topologico, una $\mathbb{R}_+^n$ -carta è il dato di un aperto U di M e di un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, con V aperto di $\mathbb{R}_+^n$, cioè $V = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Un $\mathbb{R}_+^n$ -atlante liscio è una collezione di carte $\{\phi_U : U \rightarrow V_U\}_{U \in \Lambda}$ tali che $\{U\}_{U \in \Lambda}$ sia un ricoprimento di M e le mappe di transizione siano C^∞ , cioè

$$\forall \phi : U \rightarrow V \text{ e } \psi : U' \rightarrow V' \text{ con } U \cap U' \neq \emptyset, \quad \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U') \rightarrow \phi(U \cap U') \text{ è } C^\infty.$$

Cosa vuol dire essere lisci su un sottoinsieme non aperto di $\mathbb{R}^n$?

Vuol dire essere localmente restrizione di una mappa C^∞ definita su un aperto contenente l'insieme di partenza. Cioè se $S \subset \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ è C^∞ se $\forall p \in S$ esiste un aperto U di $\mathbb{R}^n$ con $p \in U$ e $f|_{U \cap S} = F|_{U \cap S}$, con $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ C^∞ .

Se ϕ e ψ sono come sopra, è facile verificare che $\phi \circ \psi^{-1}$ è un diffeomorfismo. Inoltre, se $f : U \rightarrow U'$ è un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}_+^n$, allora $f(U \cap \partial \mathbb{R}_+^n) = U' \cap \partial \mathbb{R}_+^n$.

Definizione 3.2 - varietà con bordo

Una varietà liscia con bordo è uno spazio topologico M dotato di $\mathbb{R}_+^n$ -atlante.

Per l'osservazione appena fatta, è ben definito il bordo di M , cioè ∂M , come l'insieme dei punti $p \in M$ tali che esista una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $\phi(p) \in \partial \mathbb{R}_+^n$ (osserva che questa condizione non dipende dalla carta scelta).

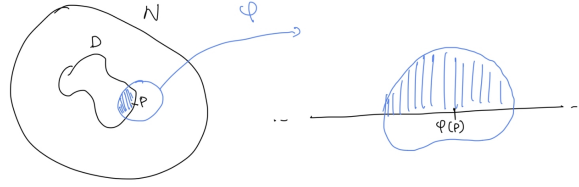
Inoltre, posto $\text{int}(M) = M \setminus \partial M$, si ha che ∂M è una $(n-1)$ -varietà senza bordo (restringendo l'atlante di M a ∂M si ottiene un atlante per ∂M a valori in $\partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \mathbb{R}^{n-1}$). Anche $\text{int}(M)$ è una n -varietà senza bordo (anche qui basta restringere le carte).

Nota

Anche per le varietà con bordo si richiede la proprietà Hausdorff e a base numerabile.

Definizione 3.3 - Dominio regolare

Sia N una n -varietà (liscia) senza bordo. Un dominio regolare di N è un sottoinsieme $D \subset N$ tale che $\forall p \in D$ esiste un U_p intorno aperto di p in N e una carta $\phi : U_p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\phi(U \cap D) = V \cap \mathbb{R}_+^n$.

**Osservazione**

Un dominio regolare, per costruzione, è una n -varietà con bordo.

Esempi

$\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1\}$ è un dominio regolare di $\mathbb{R}^n$, e perciò una n -varietà con bordo. Possiamo vedere esplicitamente il caso $n = 1$: $\forall p \neq 1$ consideriamo la mappa

$$\phi : [-1, 1) \rightarrow [0, +\infty) \quad t \mapsto t + 1.$$

Per $p = 1$, prendiamo invece

$$\psi : (-1, 1] \rightarrow [0, +\infty) \quad t \mapsto -t + 1;$$

ϕ e ψ danno un atlante. Per il caso $n \geq 2$, invece, è utile considerare il seguente teorema:

Teorema 3.4

Sia N una n -varietà senza bordo, $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ liscia e $y_0 \in \mathbb{R}$ un valore regolare per f . Allora $D = f^{-1}((-\infty, y_0])$ è un dominio regolare, avente $f^{-1}(y_0)$ come bordo.

Dimostrazione. Sia $p \in D$. Notiamo che $f^{-1}((-\infty, y_0))$ è un aperto di N , per cui se $f(p) < y_0$ posso usare una carta di N , componendola eventualmente con una traslazione per portarla a valori in $\mathbb{R}_+^n$.

Se $f(p) = y_0$, poiché y_0 è un valore regolare per f , $df_p : T_p N \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettivo, e perciò posso scegliere coordinate $x_1, \dots, x_n$ intorno a p e coordinata y intorno a y_0 tale che

- per tali coordinate f risulta essere $f(x_1, \dots, x_n) = x_n$.
- p ha coordinate $(0, \dots, 0)$.
- $y_0 = 0$.
- le coordinate di $(-\infty, y_0]$ siano $[0, +\infty)$.

Con queste scelte è chiaro che se U è un intorno di p in N con le coordinate appena descritte, allora $U \cap D$ è dato dai punti di U con coordinata n -esima ≥ 0 , che è la tesi. $\square$

Corollario 3.5

$\mathbb{D}^n$ è un dominio regolare.

Dimostrazione. Basta considerare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \|x\|^2$. Allora 1 è valore regolare per f e $\mathbb{D}^n = f^{-1}((-\infty, 1])$. $\square$

Domanda: date M e N varietà con bordo, è vero che $M \times N$ è una varietà con bordo? In generale no. Ad esempio, se $M = N = [0, 1]$, allora $M \times N$, che non è una varietà con bordo (ha problemi negli angoli).

Se però almeno una delle due varietà ha bordo vuoto, ad esempio $\partial M \neq \emptyset$ e $\partial N = \emptyset$, allora $M \times N$ è una varietà con bordo, e vale che $\partial(M \times N) = \partial M \times N$. Segue dal fatto che il prodotto di $\mathbb{R}_+^m$ e $\mathbb{R}^n$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}_+^{m+n}$.

Andiamo ora a vedere come le definizioni date per le varietà senza bordo si estendono per le varietà con bordo.

Spazio tangente

Se M è una varietà con bordo, si definisce $T_p M$ tramite le derivazioni, esattamente come nel caso senza bordo, ottenendo che $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ con $n = \dim(M)$. Si presti attenzione al fatto che la definizione con le curve ora non va più bene (soprattutto per quanto riguarda i punti appartenenti a ∂M). Se $p \in \partial M$, $T_p M \cong T_{\phi(p)} V \cong \mathbb{R}^n$, dove $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ è una carta intorno a p .

Definizione 3.6

Un vettore $v \in T_p M$ si dice:

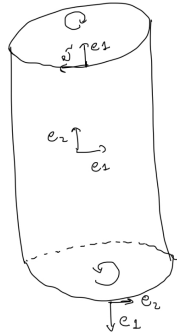
- intero (*inward*) se $d\phi_p(v) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \partial \mathbb{R}_+^n$;
- esterno (*outward*) se $d\phi_p(v) \notin \mathbb{R}_+^n$;
- tangente al bordo se $d\phi_p(v) \in \partial \mathbb{R}_+^n$.

Queste definizioni non dipendono dalla parametrizzazione locale scelta.

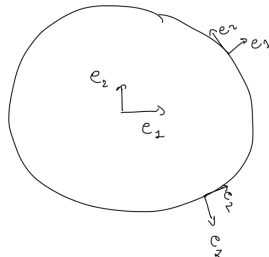
Orientazione

Come nel caso senza bordo, un'orientazione su una varietà con bordo è la scelta di un atlante orientato (cioè con cambi di carta con differenziale positivo) o di un'orientazione localmente coerente sui tangenti $T_p M$, $p \in M$.

Un'orientazione su M induce un'orientazione su ∂M con quella che viene chiamata regola del *first outward*: $\forall p \in \partial M$, fisso $v \in T_p M$ vettore esterno e definisco $(v_2, \dots, v_n)$ base di $T_p \partial M$ come positiva se $(v, v_2, \dots, v_n)$ è una base positiva di $T_p M$.



Vediamo un esempio: tramite la regola del *first outward* possiamo definire un'orientazione su S^1 a partire da quella presente su $\mathbb{D}^2$. Infatti, su $\mathbb{D}^2$ possiamo porre l'orientazione standard ereditata da $\mathbb{R}^2$, e quindi abbiamo anche un'orientazione ben definita su S^1 .

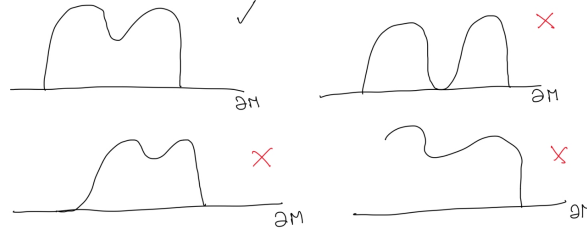


Le nozioni di embedding, immersione, sottovarietà ecc si estendono in maniera ovvia al caso con bordo. Tuttavia, è interessante isolare la classe degli embedding e delle sottovarietà *neat*:

Definizione 3.7 - Sottovarietà neat

$N \subset M$ si dice propriamente embedded (o *neat*) se

- $\partial N = N \cap \partial M$;
- N interseca trasversalmente ∂M , cioè $\forall p \in \partial N = N \cap \partial M$ allora $T_p M = T_p N + T_p \partial M$.



Cosa accade ai fibrati? Poiché il prodotto di due varietà con bordo può avere angoli, considereremo solo fibrati in cui la fibra o la base (o entrambe) hanno bordo vuoto.

In particolare, il fibrato tangente e tutti i fibrati $\mathcal{T}_h^k(M)$ sono definiti esattamente come nel caso senza bordo.

La definizione di campo vettoriale è anch'essa identica al caso senza bordo, cioè come una sezione liscia di $T_p M$. Il flusso associato a $X \in \mathfrak{X}(M)$ può dare dei problemi se $\partial M \neq \emptyset$. Affinché sia definito come nel caso senza bordo, bisogna chiedere che $X(p) \in T_p \partial M \subset T_p M \forall p \in M$. In tal caso, se M è anche compatta, il flusso è completo, cioè definito su tutto $\mathbb{R}$.

3.2 Forme differenziali

Fissiamo una n -varietà M (eventualmente con bordo).

Definizione 3.8 - k -forma differenziale

Una k -forma differenziale su M è una sezione del fibrato $\Lambda^k(M)$, cioè il dato di una famiglia di funzioni multilineari alternanti

$$\omega_p = \omega(p) : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

che varia in maniera liscia rispetto a p .

Lo spazio di tali sezioni viene indicato come $\Omega^k(M)$.

Esempi

- Una 1-forma è un campo di co-vettori. Ad esempio, se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ è liscia, df è una 1-forma su M ($df \in \Omega^1(M)$). In particolare, su $M = \mathbb{R}$ tutte le 1-forme sono fatte come df per qualche f (Teorema fondamentale del calcolo integrale, ma in generale non è così).
- $\Omega^0(M)$ è dato dalle funzioni $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Le k -forme si possono scrivere in coordinate.

Se U è un aperto di $\mathbb{R}^n$, allora

$$T_p U \cong \mathbb{R}^n = \text{Span} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right).$$

Dunque $(T_p U)^* = \text{Span}(dx^1, \dots, dx^n)$, dove i dx^i costituiscono una base duale degli $\frac{\partial}{\partial x^i}$, in quanto

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}.$$

Una base di $\Lambda^k(T_p U)$ è data da $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ al variare di $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Ricordiamo in particolare che $dx^i \wedge dx^i = 0$ e $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, e lo spazio $\Lambda^k(T_p U)$ ha quindi dimensione $\binom{n}{k}$.

Perciò possiamo scrivere una k -forma su V come

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

dove $f_{i_1 \dots i_k} : V \rightarrow \mathbb{R}$ sono lisce. Ritroviamo quindi che una 1-forma su $\mathbb{R}$ è sempre del tipo $f(x)dx$, ed è il differenziale di una funzione F , dove F è una primitiva di f .

Sfruttando un atlante, ogni k -forma su M si può scrivere in coordinate, utilizzando il pull-back:

Definizione 3.9 - Pull-back

Sia $f : M \rightarrow N$ liscia e sia $\omega \in \Omega^k(N)$. Allora è ben definita una k -forma $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ definita come

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)),$$

dove $v_1, \dots, v_k$ sono vettori in $T_p M$.

Per definizione, $f^*\omega$ è liscia e alternante.

Dunque, data una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ e una carta $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}_+^n$, la scrittura in coordinate di ω su U è $(\phi^{-1})^*(\omega) \in \Omega^k(U)$, dove

$$(\phi^{-1})^*(\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_I f_I dx^I,$$

dove $I = (i_1, \dots, i_k)$ viene detto multi-indice.

Il prodotto esterno tra $\Lambda^k(T_p M)$ e $\Lambda^h(T_p M)$ induce un prodotto esterno

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^h(M) \rightarrow \Omega^{k+h}(M)$$

definito puntualmente come $\omega \wedge \eta(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$. La somma diretta $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$ risulta così essere un'algebra graduata anticommutativa.

Infine, se $\omega \in \Omega^k(M)$, il supporto di ω è definito come

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}.$$

Utilizzando le partizioni dell'unità è sempre possibile scrivere una k -forma come somma localmente finita di k -forme supportate in aperti coordinati. Infatti, $\omega = \sum_{i \in I} \rho_i \omega$, dove $\{\rho_i\}$ è una partizione dell'unità subordinata ad un atlante di M .

Cambi di coordinate

Se ho coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ su U e coordinate $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, fissata ω , avrò

$$\omega = \sum_I f_I dx^I = \sum_I g_I d\bar{x}^I.$$

In che modo sono collegate tra loro le f_I e le g_I ?

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} \left(\sum_J \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^J} d\bar{x}^J \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_J \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^J} d\bar{x}^J \right).$$

Se $k = n = \dim(M)$, allora ho un solo multi-indice, e perciò

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = f \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j \right) = f \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right)_{ij} d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n.$$

3.2.1 Integrale

Indichiamo con $\Omega_c^k(M)$ l'insieme delle k -forme a supporto compatto, dove per supporto di una k -forma ω intendiamo la chiusura dei punti su cui ω non si annulla. Sia quindi M una n -varietà e $\omega \in \Omega_c^n(M)$, e vogliamo definire la grandezza

$$\int_M \omega.$$

Partiamo dal caso più semplice in cui $M = \mathbb{R}^n$ o $M = \mathbb{R}_+^n$. Sappiamo che, in questo caso, possiamo scrivere una n -forma come

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

e quindi definiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f,$$

dove l'integrale a destra è l'integrale di Lebesgue. Vediamo ora il caso in cui M è una n -varietà in generale:

- Supponiamo che $\text{supp}(\omega) \subset U$ con U dominio di una carta, cioè esiste $\phi : U \xrightarrow{\pi} V \subset \mathbb{R}^n$, e definiamo

$$\int_M \omega := \int_V \phi_* \omega.$$

Questa definizione è ben posta, cioè non dipende dalla carta. Sia infatti ψ un'altra carta, allora possiamo scrivere $\phi_* \omega$ e $\psi_* \omega$ come

$$\phi_* \omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad \psi_* \omega = g d\bar{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n.$$

Come cambiano f e g ? Come il determinante dello Jacobiano, cioè come $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right)_{ij}$. Dal Teorema di cambio delle variabili, sappiamo però che gli integrali cambiano come il modulo del determinante dello Jacobiano, e non è detto che i due segni siano gli stessi. Quello che però possiamo richiedere è che, dato che M è una varietà orientata, ϕ e ψ siano due carte con mappe di transizione con Jacobiano a determinante positivo.

- Caso generale
Sia $\omega \in \Omega_c^n(M)$ e prendiamo $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ un atlante orientato, e $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_i\}$. Definisco allora

$$\omega_i = \rho_i \omega \in \Omega_c^n(M),$$

che però ha supporto contenuto nel dominio di una carta. Inoltre solo un numero finito di ω_i è non nullo. Infatti, fissato $p \in \text{supp}(\omega)$ esiste U_p intorno aperto di p per cui solo un numero finito di ρ_i è non nullo. Per compattezza di $\text{supp}(\omega)$, posso considerare solo un numero finito di U_p , e quindi trovo un numero finito di ω_i diverse da zero. Ora ho

$$\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_k$$

e definisco

$$\int_M \omega := \sum_i \int_M \omega_i.$$

Facciamo vedere che questa definizione non dipende dalla particolare partizione dell'unità scelta. Supponiamo quindi di avere un'altra partizione dell'unità $\{\rho'_j\}$, e vediamo che

$$\int_M \omega := \sum_i \int \rho_i \omega \quad \text{e} \quad \sum_j \rho'_j = 1$$

quindi

$$\int \omega = \sum_i \int \rho_i \omega \cdot 1 = \sum_i \int \rho_i \omega \sum_j \rho'_j = \sum_i \sum_j \int \rho_i \rho'_j \omega = \sum_j \int \left(\sum_i \rho_i \right) \rho'_j \omega = \sum_j \int \rho'_j \omega.$$

Osservazione

Prendiamo l'integrale di ω su M , ma su cui mettiamo l'orientazione opposta (la indichiamo con $-M$). Allora vale che

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

Abbiamo visto che in carte, una funzione $f \in C^\infty(M)$ e una n -forma $\omega \in \Omega^n(M)$ sono simili. Ma questo vale solo quando lette in carte. Infatti, in generale, se prendiamo $p \in M$ allora $f(p)$ è un numero, mentre $\omega(p)$ non lo è. D'altra parte, se M è orientata e $\omega \in \Omega_c^n(M)$, abbiamo appena definito $\int_M \omega$, ma non possiamo definire $\int_M f$.

Se $S \subset M$ è un boreliano, $\omega \in \Omega_c^n(M)$, possiamo definire $\int_S \omega$ allo stesso modo. Inoltre, vale anche che se $S = \bigsqcup S_i$ (con un insieme di indici finito o numerabile), allora

$$\int_S \omega = \sum_i \int_{S_i} \omega.$$

Corollario 3.10

Se $S \subset M$ ha misura nulla, allora

$$\int_M \omega = \int_{M \setminus S} \omega.$$

Esempio

Prendiamo $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Come indichiamo una forma su S^1 ? Prendiamo θ la coordinata su S^1 , cioè l'angolo. Si noti che θ non è una funzione, ma $d\theta$ è una 1-forma ($d\theta$ non vede le costanti additive, quindi neanche il $2k\pi$). Vogliamo calcolare

$$\int_{S^1} d\theta.$$

Per il corollario appena visto, calcolare tale integrale equivale a calcolare l'integrale di $d\theta$ su S^1 meno un insieme di misura nulla. Scegliamo come insieme di misura nulla il polo Nord, cioè il punto $(0, 1)$, e otteniamo che

$$\int_{S^1} d\theta = \int_{S^1 \setminus \{N\}} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi.$$

Osservazione

Se $\phi : M \xrightarrow{\sim} N$ è un diffeomorfismo, e $\omega \in \Omega_c^n(M)$, allora vale che

$$\int_M \omega = \int_N \phi_* \omega.$$

Esempio

Consideriamo il Toro n -dimensionale $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, con coordinate $(\theta_1, \dots, \theta_n)$. Allora $d\theta_1$ è una 1-forma, e $\omega = d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_n$ è una n -forma. Quanto vale $\int_{\mathbb{T}^n} \omega$? Partiamo con l'osservare che l'insieme $D = (0, 2\pi)^n$ è un insieme tale $\mathbb{T}^n \setminus D$ ha misura nulla, quindi possiamo svolgere l'integrale su D anziché su $\mathbb{T}^n$. Quindi

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \int_D \omega = \int_D d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_n = (2\pi)^n.$$

Definizione 3.11

Sia M una n -varietà orientata, e $S \subset M$ una k -sottovarietà orientata. Presa $\omega \in \Omega_c^k(M)$ (o più in generale in modo che $\text{supp}(\omega) \cap S$ sia compatto in S), e considerata $\iota : S \rightarrow M$, allora

vale che

$$\int_S \omega := \int_S \iota^* \omega.$$

3.2.2 Forma volume

In generale, su una varietà non esiste il concetto di "volume", e comunque non riusciamo a misurare i sottoinsiemi (come facciamo su $\mathbb{R}$ con l'integrale di Lebesgue, o comunque con misure legate ad integrali).

La soluzione più conveniente è quella di privilegiare una forma (e non esiste una scelta canonica per farlo), chiamata *forma volume*, e definire il volume di un sottoinsieme S come l'integrale di tale forma su S .

Definizione 3.12 - Forma Volume

Sia M una varietà orientata. Una forma volume su M è una n -forma tale che $\forall p \in M$ e $\forall (v_1, \dots, v_n)$ base positiva di $T_p M$, vale che

$$\omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

In particolare, una forma volume è mai nulla su M ($\omega(p) \neq 0 \forall p \in M$). Possiamo usare una forma volume per definire il volume dei boreliani di M .

Definizione 3.13 - Volume

$S \subset M$ boreliano e ω forma volume, allora poniamo il volume di S come

$$Vol(S) := \int_S \omega.$$

Data una carta $\phi: U \rightarrow V$ e ω una forma volume su M , allora posso considerare $\phi_* \omega|_U$, che scrivo su V come $f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ con $f > 0$. Vale che

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(v_1, \dots, v_n) = \det[v_1, \dots, v_n] > 0.$$

Quindi $Vol(U) := \int_U \omega = \int f \in [0, +\infty]$.

Proposizione 3.14

M varietà orientata, allora esiste sempre $\omega \in \Omega^n(M)$ forma volume.

Dimostrazione. Prendiamo $\mathcal{A} = \{\phi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ un atlante orientato, e $\forall i$ definisco ω_i come il pull-back $\phi_i^* dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, dove $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ è la forma volume euclidea su $\mathbb{R}^n$; vale allora che ω_i è una forma volume su U_i .

Prendiamo $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento dato dagli U_i e faccio la cosa più ovvia, cioè definisco

$$\omega := \sum_i \rho_i \omega_i.$$

Questa definizione funziona per lo stesso motivo per cui funzionava con i tensori metrici, ovvero che se le ω_i sono positive, anche una loro combinazione convessa lo è. $\square$

Vi è anche un altro modo di dimostrare la proposizione precedente, e passa per i tensori metrici su M . Sappiamo che data M varietà esiste g tensore metrico definito positivo, ovvero $g(p)$ è un prodotto scalare definito positivo sui $T_p M$. Dato g tensore metrico (anche non definito positivo), allora possiamo associare a g la forma ω_g (che sarà poi una forma volume) data dalla proprietà per cui, data $(v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale e positiva di $T_p M$, allora vale che

$$\omega_g(p)(v_1, \dots, v_n) = 1.$$

Questa richiesta determina $\omega(p)$: le matrici di cambiamento di base tra basi ortonormali (per prodotti scalari non degeneri e in generale non definiti) hanno determinante ± 1 . Ma ho anche chiesto che la base $(v_1, \dots, v_n)$ fosse positiva, quindi non rimane che $\det = 1$.

Corollario 3.15

$Vol(M) > 0$ e se M è compatta $Vol(M) < +\infty$.

3.2.3 Differenziale

Data $\omega \in \Omega^k(M)$, voglio definire $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$:

- Se $M = \mathbb{R}^n$ o $M = \mathbb{R}_+^n$, allora ω ha una forma del tipo

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_I f_I dx^I$$

con I multi-indice crescente. Definisco allora

$$d\omega := \sum_I df_I \wedge dx^I.$$

- Se M è una varietà qualsiasi, allora definisco $d\omega$ localmente in carte come in $\mathbb{R}^n$. Cioè, data $\omega \in \Omega^k(M)$, allora $\forall \phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ carta posso definire $\phi_*\omega|_U$, e su di lei posso fare il differenziale, e poi il pull-back. Quindi ottengo

$$d\omega|_U := \phi^* (d\phi_*\omega|_U).$$

Proposizione 3.16

d è ben definito, cioè è un operatore lineare

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

e soddisfa che:

- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, con $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$.
- $d^2 = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo i due punti nel caso di una carta (o comunque di aperti di $\mathbb{R}^n$); la linearità di d per aperti di $\mathbb{R}^n$ è ovvia. Prendiamo allora $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \Omega^h(\mathbb{R}^n)$, cioè $\omega = \sum_I f_I dx^I$ e $\eta = \sum_J g_J dx^J$, e calcoliamo $d(\omega \wedge \eta)$:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d\left(\sum_I f_I dx^I \wedge \sum_J g_J dx^J\right) = \sum_{I,J} d(f_I g_J dx^I \wedge dx^J) = \sum_{I,J} d(f_I g_J dx^I \wedge dx^J) = \\ &= \sum_{I,J} d(f_I g_J) \wedge dx^I \wedge dx^J = \sum_{I,J} (df_I g_J + f_I dg_J) \wedge (dx^I \wedge dx^J) = \sum_{I,J} df_I g_J dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} f_I dg_J \wedge dx^I \wedge dx^J. \end{aligned}$$

La prima parte diventa

$$\sum_{I,J} df_I g_J dx^I \wedge dx^J = \sum_{I,J} df_I \wedge dx^I \wedge g_J dx^J = \left(\sum_I df_I \wedge dx^I\right) \wedge \left(\sum_J g_J dx^J\right) = d\omega \wedge \eta.$$

Per quanto riguarda la seconda parte, bisogna notare che quando facciamo "scorrere" dg_J verso dx^J , stiamo scambiando dg_J con dx^I , e siccome ω era una k -forma, allora devo eseguire k scambi. Ricordando che $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, allora abbiamo

$$\sum_{I,J} f_I dg_J \wedge dx^I \wedge dx^J = (-1)^k \sum_{I,J} f_I dx^I \wedge dg_J \wedge dx^J = (-1)^k \left(\sum_I f_I dx^I\right) \wedge \left(\sum_J dg_J \wedge dx^J\right) = (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Ci rimane da dimostrare il secondo punto, e anche qui lo dimostriamo per un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia quindi $\omega = f_I dx^I$.

$$d\omega = df \wedge dx^I = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I$$

$$d(d\omega) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I$$

e basta notare che stiamo sommando su tutti gli i e j , ma $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ è simmetrico, mentre $dx^i \wedge dx^j$ è antisimmetrico. $\square$

In realtà, le proprietà presentate nella proposizione precedente caratterizzano completamente d per ogni aperto U di $\mathbb{R}^n$, quindi d è ben definito su ogni M .

Osservazione

Il differenziale commuta con il pull-back, cioè $\phi^* d\omega = d\phi^* \omega$; come prima, basta dimostrarlo in carte. Inoltre vale che $\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^* \omega \wedge \phi^* \eta$.

Dato $U \subset \mathbb{R}^n$, una 1-forma su U può essere scritta come $\omega = f_1 dx^1 + \dots + f_n dx^n$. Possiamo associare ad ω un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(U)$ definito come

$$X^i = f_i,$$

e quindi abbiamo un isomorfismo tra $\Omega^1(U)$ e $\mathfrak{X}(U)$. Analogamente, data una $(n-1)$ -forma η , possiamo scriverla come

$$\eta = \sum_{i=1}^n f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n,$$

dove quando scriviamo $\hat{dx}^i$ intendiamo dire che non c'è il fattore dx^i nel prodotto wedge. Anche qui possiamo associare alla forma η un campo vettoriale $Y \in \mathfrak{X}(U)$, definito come

$$Y^i = (-1)^{i+1} f_i.$$

Restringiamoci un momento a considerare il caso di $\mathbb{R}^3$. Infatti, in questo caso abbiamo che sia $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ che $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ sono isomorfi a $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, mentre vale in generale che $\Omega^0(\mathbb{R}^3)$ e $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ sono isomorfi a $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Considerando la successione

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

possiamo considerare allora la successione data dagli isomorfismi che abbiamo appena visto, cioè

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Le mappe della successione con i campi sono mappe che già conosciamo, cioè

$$\begin{array}{lll} \nabla : C^\infty(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & f \longmapsto \nabla f & \text{gradiente,} \\ \text{rot} : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & X \longmapsto \nabla \times X & \text{rotore,} \\ \text{div} : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3) & X \longmapsto \nabla \cdot X & \text{divergenza.} \end{array}$$

La proprietà del differenziale per cui $d^2 = 0$ si traduce nelle proprietà del nabla calcolo che già conosciamo, ovvero

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot (\nabla \times X) = 0.$$

Proposizione 3.17

Siano γ una curva a valori in $\mathbb{R}^n$ (cioè una sottovarietà di dimensione 1 e orientata) e $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R}^n)$. Se consideriamo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ il campo associato a ω , allora vale che

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma X \cdot \tau,$$

dove τ indica il vettore tangente a γ .

Dimostrazione. Localmente possiamo pensare $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ embedding e parametrizzata per lunghezza d'arco (cioè $|\tau| = 1$). Allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n = \int_{(a,b)} \left(f_1 \frac{dx^1}{dt} + \cdots + f_n \frac{dx^n}{dt} \right) dt = \int_a^b f_1 \gamma^1 + \cdots + f_n \gamma^n = \int_a^b X \cdot \gamma.$$

□

Analogamente, se abbiamo $S \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperficie orientata e $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, allora vale un risultato analogo, ovvero

$$\int_S \omega = \int_S X \cdot \nu,$$

dove X è il campo associato a ω e ν è il versore normale alla superficie.

3.2.4 Il Teorema di Stokes

Abbiamo visto sia l'integrazione che la derivazione di k -forme, e vogliamo vedere se esiste un qualche tipo di relazione tra queste due operazioni. Consideriamo un caso semplice, ovvero prendiamo

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \implies \int_a^b df = f(b) - f(a),$$

cioè il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Interpretiamo $[a, b]$ come una 1-varietà orientata con bordo, e sappiamo che l'orientazione di $[a, b]$ induce un'orientazione anche sul suo bordo, cioè sui punti a e b . Pensando in questo modo, allora possiamo scrivere una cosa del genere:

$$\int_{[a,b]} df = f(b) - f(a) \sim \int_{\partial[a,b]} f.$$

Vogliamo cercare di generalizzare questa relazione, dove al posto di $[a, b]$ vorremmo mettere una n -varietà orientata con bordo qualsiasi, e al posto di una funzione f vorremmo inserire una $(n-1)$ -forma.

Teorema 3.18 - Stokes

Siano M una varietà orientata (eventualmente) con bordo e $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Allora

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dimostrazione. Partiamo con l'osservare che è tutto ben definito: se ω è una $(n-1)$ -forma, allora $d\omega$ è una n -forma, e l'orientazione di M induce un'orientazione di ∂M . Consideriamo quindi $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$, e dalla compattezza di $\text{supp}(\omega)$ sappiamo che possiamo scrivere

$$\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_k,$$

dove le ω_i hanno supporto in una carta $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$. Consideriamo quindi ω_i : la tesi vale per ω_i se e solo se vale per $(\phi_i)_* \omega_i$, quindi posso supporre di trovarmi dentro un aperto V di $\mathbb{R}_+^n$. Inoltre, poiché $\text{supp}(\omega)$ è un compatto di M , allora posso supporre che $M = \mathbb{R}_+^n$. Sia quindi

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

e posso ridurmi a considerare un solo addendo alla volta, cioè a ridurmi al caso

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Allora

$$d\omega = df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Si presentano dunque due casi:

- l'indice i è minore di n . Calcoliamo separatamente i due integrali.

$$\int_M d\omega = (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Per la definizione di integrali di n -forme, questo è uguale a

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^n,$$

(si noti che non stiamo più considerando il segno, in quanto vogliamo dimostrare che si annulla) e per Fubini-Tonelli, integrando prima sulla componente x^i

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^1 \dots dx^n = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} f(x_1, \dots, N, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, -N, \dots, x_n) \right) dx^1 \dots dx^n = 0 \end{aligned}$$

in quanto f è a supporto compatto. Per quanto riguarda l'altro membro

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \iota^* (f dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \circ \iota \iota^*(dx^1) \wedge \cdots \wedge \iota^*(dx^n), \end{aligned}$$

dove

$$\iota^*(dx^j) = \begin{cases} dx^j & \text{se } j < n \\ 0 & \text{se } j = n \end{cases}.$$

Cioè l'integrale è nullo (in quanto avevamo supposto che $i < n$, e quindi compare $\iota^*(dx^n) = 0$).

- $i = n$. Valutiamo di nuovo i due integrali.

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n := (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^1 \dots dx^n = \\ &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right) dx^1 \dots dx^{n-1} = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} -f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1} = \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Valutiamo l'altro membro:

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

La seconda uguaglianza è data per definizione di integrale, concentriamoci sulla prima, ed in particolare sul segno. Vogliamo vedere che l'orientazione su $\partial \mathbb{R}_+^n$ è la stessa di $\mathbb{R}^{n-1}$ se e solo se n è pari.

Infatti, $\partial \mathbb{R}_+^n$ eredita l'orientazione di $\mathbb{R}_+^n$, e per convenzione per tale orientazione si usa la regola del "first outward". Quindi, una base positiva per $\partial \mathbb{R}_+^n$ è data da $(-e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$. In particolare $(e_1, \dots, e_{n-1})$ è base positiva per $\partial \mathbb{R}_+^n$ se e solo se n è pari.

□

Il Teorema di Stokes è una generalizzazione di tutti quei teoremi che legano operazioni di integrazione e di derivazione; vediamo alcuni corollari.

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione liscia, allora

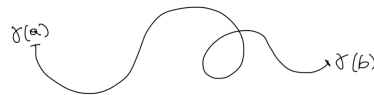
$$\int_{[a,b]} f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Stiamo infatti pensando a $[a, b]$ come una 1-varietà con bordo dato da $\{a, b\}$.

Integrazioni su curve

Data $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione liscia, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, allora

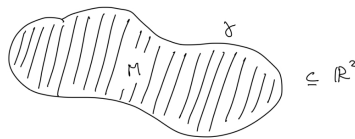
$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$



Gauss-Green

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzioni lisce, allora

$$\int_{\partial D} f dx + g dy = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

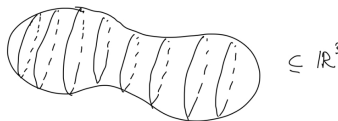


Teorema della Divergenza

Sia Σ una superficie chiusa in $\mathbb{R}^3$ e $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, allora

$$\int_{\Sigma} X \cdot \nu = \int_V \nabla \cdot X dx dy dz,$$

dove ν è il versore normale esterno alla superficie, e V è la regione di spazio racchiusa da Σ .



Teorema di Kelvin-Stokes

Sia Σ una superficie con bordo in $\mathbb{R}^3$ e sia $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Allora

$$\int_{\Sigma} \text{rot}(X) \cdot \nu = \int_{\partial \Sigma} X \cdot \tau,$$

dove ν è il versore normale alla superficie e τ è il vettore tangente a $\partial \Sigma$.



Corollario 3.19

Se $\partial M = \emptyset$, allora $\int_M d\omega = 0$.

Osservazione

C'è una certa corrispondenza tra il fatto che $d^2 = 0$ e $\partial^2 = \emptyset$. Cioè il bordo di una varietà con bordo è una varietà $(n-1)$ -dimensionale senza bordo.

3.2.5 Derivata di Lie e contrazioni

Sia M una varietà qualsiasi, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo su M e $s \in \Gamma\mathcal{T}_h^k(M)$ un campo tensoriale. Vogliamo definire un'operazione di derivazione di s rispetto a X . Sia $p \in M$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$; sappiamo che esiste U_p intorno aperto di p su cui è definito il flusso di X per ogni q in U_p , cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale per cui Φ_t^X è ben definito $\forall t < \varepsilon$ e su tutto U_p . Chiamiamo V l'insieme $\Phi_\varepsilon^X(U_p)$, che è un aperto diffeomorfo a U_p .

Sappiamo che $\forall t < \varepsilon$ è ben definito

$$d(\Phi_t^X)_p : T_p M \xrightarrow{\sim} T_{\gamma(t)} M,$$

dove $\gamma(u)$ è definita come $\gamma(u) = \Phi_u^X(p)$. Il differenziale quindi identifica gli spazi tangenti al variare di $t \in [0, \varepsilon]$, e quindi abbiamo un'identificazione

$$d(\Phi_t^X)_p : \mathcal{T}_h^k(T_p M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_h^k(T_{\gamma(t)} M)$$

Il campo tensoriale s è definito su entrambi gli spazi, e quindi possiamo vedere come variare s al variare di t . Quello che abbiamo fatto è quindi capire la variazione di s lungo le linee integrali di X , cioè un'operazione di s rispetto a X .

Definizione 3.20 - Derivata di Lie

Dati $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma\mathcal{T}_h^k(M)$, $\forall p \in M$ possiamo definire la derivata di s rispetto a X come

$$\mathcal{L}_X(s) := \frac{d}{dt} (d(\Phi_t^X)_p^{-1}(s(\gamma(t))))|_{t=0}.$$

Osservazione

Il punto centrale della discussione è che, in generale, noi vorremmo riuscire a derivare cose che sono definite a partire dagli spazi tangenti. Il problema è che non c'è alcun modo naturale di identificare gli spazi tangenti, e in questo caso usiamo un campo vettoriale per avere un'identificazione dei tangenti (che dipende per l'appunto dal campo).

La mappa $\mathcal{L}_X$ soddisfa varie proprietà, che in realtà la caratterizzano completamente:

- $\mathcal{L}_X : \Gamma\mathcal{T}_h^k(M) \rightarrow \Gamma\mathcal{T}_h^k(M)$ è lineare.
- $\mathcal{L}_X$ è locale, cioè se $s|_U \equiv s'|_U$, allora $\mathcal{L}_X(s)|_U \equiv \mathcal{L}_X(s')|_U$.
- Nel caso in cui $(h, k) = (0, 0)$, allora $\mathcal{L}_X(f) = Xf$.
- Vale la regola di Leibniz, cioè $\mathcal{L}_X(s \otimes s') = \mathcal{L}_X(s) \otimes s' + s \otimes \mathcal{L}_X(s')$.
- Commuta con le contrazioni, cioè con quelle funzioni (che abbiamo già definito) che trasformano tensori (h, k) in tensori $(h-1, k-1)$.

Queste proprietà caratterizzano completamente $\mathcal{L}_X$, e la derivata di Lie è il massimo che riusciamo a fare senza aggiungere altri tipi di strutture su una varietà.

Definizione 3.21 - Contrazione per X

Fissato $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo la contrazione per X come la mappa

$$\iota_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \quad \omega \longmapsto \iota_X(\omega),$$

dove $\iota_X(\omega)$ è definita come

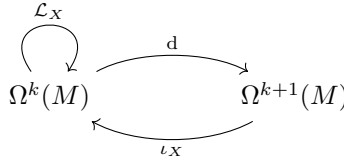
$$\iota_X(\omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \omega(X(p), v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Cioè quello che fa la contrazione per X è prendere una k -forma ω , prendere $k - 1$ vettori in $T_p M$, aggiungere $X(p)$ in testa e valutare in ω .

Riassuntino

Abbiamo quindi 3 operatori definiti fino ad ora:

- $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ il differenziale esterno;
- $\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$ la derivata di Lie;
- $\iota_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$ la contrazione.



Proposizione 3.22

$\mathcal{L}_X$ è una derivazione, cioè vale la regola di Leibniz

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \eta).$$

Al contrario, ι_X e d sono anti-derivazioni, cioè

$$\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\iota_X \eta),$$

con $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$.

Osservazione

$\iota_X \circ \iota_X = 0$, proprio come il differenziale.

Proposizione 3.23

Vale che

$$[\mathcal{L}_X, d] = 0 \quad e \quad [\mathcal{L}_X, \iota_X] = 0.$$

Dimostrazione. La prima uguaglianza deriva dal fatto che d commuta con i diffeomorfismi e con le derivazioni di cammini di forme, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(d\omega)(p) &= \frac{d}{dt} (d(\Phi_t^X)^{-1}(d\omega(\Phi_t(p))))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (dd(\Phi_t^X)^{-1}(\omega(\Phi_t(p))))|_{t=0} = \\ &= d \left(\frac{d}{dt} d(\Phi_t^X)^{-1}(\omega(\Phi_t(p))) \right) = d\mathcal{L}_X(p). \end{aligned}$$

Le seconda è analoga. □

Teorema 3.24 - Formula magica di Cartan

Vale che

$$\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d.$$

I

Dimostrazione. Notiamo che entrambi i membri sono delle derivazioni, infatti la composizione di due anti-derivazioni sono delle derivazioni. Quindi entrambi i membri si comportano bene rispetto al prodotto wedge, ed inoltre sono locali; perciò possiamo fare i calcoli all'interno di una carta. In una carta, scriviamo

$$\omega = \sum_I f_I dx^I,$$

ed in particolare notiamo che

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = d(x^{i_1} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}).$$

Basta quindi mostrare la tesi quando $\omega = f$ o $\omega = df$ (infatti una forma si scrive in generale come prodotto e somma di funzione e differenziale, dove il differenziale è quello che abbiamo appena scritto; inoltre le derivazioni si comportano bene rispetto al prodotto wedge). Perciò:

- Se $\omega = f$, allora sappiamo dalle proprietà sulla derivata di Lie che $\mathcal{L}_X(f) = Xf$, e per l'altro membro abbiamo

$$(d\iota_X + \iota_X d)f = d \circ \iota_X f + \iota_X \circ df.$$

Il primo termine è nullo, in quanto una funzione è una zero-forma, quindi farne la contrazione equivale a portarla nelle (-1) -forme, cioè è uguale a zero. Il secondo invece è uguale a Xf per definizione di ι_X ; qui df è una 1-forma, e $\iota_X(df)$ equivale a valutare solo in Xf .

- Se ora $\omega = df$, dalla proposizione precedente abbiamo che $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X(f)) = d(Xf)$. L'altro membro invece è

$$(d\iota_X + \iota_X d)df = d\iota_X df + \iota_X d^2 f = d(Xf).$$

Abbiamo usato il fatto che $d^2 = 0$ e che $\iota_X(df) = Xf$.

□

Osservazione

La formula $\mathcal{L}_X = \iota_X d + d\iota_X$ ricorda molto le omotopie di complessi di catene, che vedremo tra poco.

3.2.6 Applicazioni alla relatività

Questa sezione è solo di approfondimento e può essere tranquillamente saltata.

Usiamo gli strumenti matematici introdotti fino ad ora per trattare due delle più grandi teorie fisiche: la relatività di Einstein e le equazioni di Maxwell. Entrambe hanno una forte natura geometrica e possono essere descritte usando tensori metrici e forme differenziali. Partiamo dalla prima.

Nella relatività speciale, lo spazio-tempo viene chiamato *Spazio-tempo di Minkowski* e non è altro che $\mathbb{R}^4$ con coordinate (t, x, y, z) equipaggiato con un tensore metrico η . Poiché lo spazio tangente ad ogni punto di $\mathbb{R}^4$ è canonicamente identificato come $\mathbb{R}^4$ stesso, un tensore metrico è dato da una matrice 4×4 simmetrica e invertibile, che dipende in maniera liscia dal punto che stiamo considerando. Il campo tensoriale usato è costante e vale

$$\eta = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove c indica la velocità della luce. In realtà, al posto di considerare coordinate (t, x, y, z) possiamo considerare coordinate (ct, x, y, z) , in modo da avere $\eta_{1,1} = -1$.

La prima cosa da notare è che η costituisce un prodotto scalare non degenere di segnatura $(3, 1)$, perciò possiamo indicare lo spazio-tempo di Minkowski come $\mathbb{R}^{3,1}$. Interpretando quindi η come prodotto scalare, dati $v, w \in \mathbb{R}^{3,1}$ abbiamo

$$\eta(v, w) = \eta_{ij} v^i w^j,$$

e quindi definire una specie di "norma" come

$$||v||^2 = \eta(v, v).$$

Definizione 3.25 - Evento

Un elemento $v \in \mathbb{R}^{3,1}$ viene detto evento.

Definizione 3.26 - Intervallo

Chiamiamo intervallo di v la quantità $\eta(v, v)$.

Se $v \in \mathbb{R}^{3,1}$, $v \neq 0$, allora l'intervallo di v può essere negativo, positivo o nullo. Diciamo che un evento v , $v \neq 0$ è di tipo:

- spazio, se $\eta(v, v) > 0$;
- tempo, se $\eta(v, v) < 0$;
- luce, se $\eta(v, v) = 0$.

Glie eventi sono partizionati in due coni aperti, che dipendono dal segno della loro componente v^0 , e in particolare chiamiamo:

- *passato*, l'insieme degli eventi che hanno $v^0 < 0$;
- *futuro*, l'insieme degli eventi che hanno $v^0 > 0$.

Definizione 3.27 - Trasformazioni di Lorentz

Una trasformazione di Lorentz è un isomorfismo lineare di $\mathbb{R}^{3,1}$ che preserva η (inteso come prodotto scalare).

Quindi una trasformazione di Lorentz è una matrice A tale che

$$A^T \eta A = \eta \quad \text{che in coordinate diventa} \quad A_j^i \eta_{ik} A_l^k = \eta_{jl}.$$

Il gruppo delle trasformazioni di Lorentz è denotato come $O(3, 1)$. Una base di Lorentz è quindi una base per cui $\eta(v_i, v_j) = \eta_{ij}$, e una matrice A è una trasformazione di Lorentz se e solo se le sue colonne sono una base di Lorentz per $\mathbb{R}^{3,1}$. In particolare, se consideriamo una matrice $B \in O(3)$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

è una trasformazione di Lorentz. Queste matrici rappresentano le usuali isometrie dello spazio tridimensionale e non hanno nessun effetto sul tempo. Una trasformazione che invece prende in considerazione anche il tempo è il *boost* lungo un asse. Un esempio è il boost lungo l'asse x , che è dato dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\zeta) & -\sinh(\zeta) & 0 & 0 \\ \sinh(\zeta) & \cosh(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al contrario di quanto fanno le rotazioni tridimensionali, valori differenti di $\zeta \in \mathbb{R}$ danno differenti trasformazioni, e non vi è quindi periodicità.

La relatività speciale (e in particolar modo le trasformazioni di Lorentz) furono introdotte da Einstein per risolvere l'incompatibilità delle equazioni di Maxwell con la meccanica Newtoniana. Non ci sorprende quindi il fatto che le equazioni di Maxwell si adattino in modo naturale alla geometria dello spazio-tempo di Minkowski.

Siamo abituati a pensare a $\vec{E}$ e $\vec{B}$ come campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$. In realtà, possiamo reinterpretare questi campi come componenti di un tensore antisimmetrico di tipo $(0, 2)$, che chiamiamo $\mathfrak{F}$.

Il *campo tensoriale elettromagnetico* è una 2-forma su $\mathbb{R}^{3,1}$. Una 2-forma su tale spazio è semplicemente una matrice antisimmetrica 4×4 che dipende in modo liscio dal punto scelto; in particolare, possiamo scrivere le componenti di $\mathfrak{F}$ come

$$\mathfrak{F} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Scrivendola come una forma, allora abbiamo

$$\mathfrak{F} = -E_1 dt \wedge dx - E_2 dt \wedge dy - E_3 dt \wedge dz + B_3 dx \wedge dy + B_2 dz \wedge dx + B_1 dy \wedge dz.$$

Proviamo a scrivere il differenziale esterno di $\mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} d\mathfrak{F} &= \left(\frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) dt \wedge dx \wedge dy + \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) dt \wedge dz \wedge dx + \\ &+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \right) dt \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Se imponiamo $d\mathfrak{F} = 0$, possiamo ricavare due delle equazioni di Maxwell, cioè quelle date da

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot B = 0 \end{cases}.$$

Anche le altre due equazioni possono essere ricavate da una singola uguaglianza, ma prima dobbiamo formalizzare un attimo il concetto di carica e di corrente.

Possiamo infatti unificare i concetti di carica e corrente in un unico oggetto chiamato *densità di quadri-corrente*, cioè un campo vettoriale J su $\mathbb{R}^{3,1}$. Lo indichiamo come $\mathfrak{J}$, e le sue componenti sono

$$\mathfrak{J} = (\rho, J^1, J^2, J^3),$$

dove la componente temporale ρ è chiamata *densità di carica*, mentre la componente spaziale $j = (J^1, J^2, J^3)$ è detta *densità di corrente*.

L'equazione imposta prima, cioè $d\mathfrak{F} = 0$ non è correlata al tensore metrico scelto, mentre l'equazione che andremo a scrivere ora dipenderà da η . Infatti, il collegamento tra forme differenziali e i tensori metrici è dato dall'operatore $*$ di Hodge. Possiamo scrivere tutto esplicitamente per $\mathbb{R}^{3,1}$. L'orientazione di $\mathbb{R}^{3,1}$ con η induce la forma volume

$$\omega = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

L'operatore $*$ trasforma k -forme in $(4 - k)$ -forme, e in particolare vale che $*^2 = id$ sulle 1- e 3-forme e $*^2 = -id$ sulle 0-, 2- e 4-forme. Applicando l'operatore $*$ alla forma $\mathfrak{F}$ otteniamo

$$*\mathfrak{F} = E_1 dx \wedge dz + E_2 dz \wedge dx + E_3 dx \wedge dy + B_1 dt \wedge dx + B_2 dt \wedge dy + B_3 dt \wedge dz.$$

Le componenti di $*\mathfrak{F}$ possono essere quindi scritte come

$$*\mathfrak{F} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo la quadri-corrente $\mathfrak{J}$, che è un campo vettoriale, e che possiamo trasformare in una 1-forma (che chiamiamo ancora $\mathfrak{J}$) contraendolo con il tensore metrico η . In coordinate, $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J}^j \eta_{ij}$, e quindi

$$\mathfrak{J} = -\rho dt + J^1 dx + J^2 dy + J^3 dz.$$

Applicando l'operatore $*$, troviamo

$$*\mathfrak{J} = \rho dx \wedge dy \wedge dz - J^1 dt \wedge dy \wedge dz - J^2 dt \wedge dz \wedge dx - J^3 dt \wedge dx \wedge dy.$$

Da qui ricaviamo che le equazioni

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times B = j + \frac{\partial E}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot E = \rho \end{cases}$$

sono equivalenti a richiedere che

$$d(*\mathfrak{J}) = *\mathfrak{J}.$$

Quindi le equazioni di Maxwell possono essere riscritte come

$$\begin{cases} d\mathfrak{J} = 0 \\ d(*\mathfrak{J}) = *\mathfrak{J} \end{cases}.$$

Vedremo nella prossima sezione che richiedere che una forma su $\mathbb{R}^n$ sia tale che $d\omega = 0$ equivale a chiedere che $\omega = d\eta$. Nel nostro caso, quindi, richiedere che $d\mathfrak{J} = 0$ equivale a chiedere che esista una 1-forma $\mathcal{A}$, che chiameremo *potenziale*, per cui

$$d\mathcal{A} = \mathfrak{J}.$$

Il vantaggio di usare il potenziale è quello che può essere descritto da soli 4 parametri, mentre ha lo svantaggio che non è unico. Scriviamo

$$\mathcal{A} = -V dt + A^1 dx + A^2 dy + A^3 dz,$$

e allora notiamo che V e $a = (A^1, A^2, A^3)$ sono gli usuali potenziali per il campo elettrico e magnetico, cioè

$$E = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial a}{\partial t} \quad B = \vec{\nabla} \times a.$$

3.3 Coomologia di De Rham

Diamo ora una costruzione algebrica che usa le forme differenziali che viene chiamata *Coomologia di De Rham*. Tutto nasce dal fatto che $d^2 = 0$, e vogliamo cercare di replicare quello che abbiamo già visto per $\mathbb{R}^3$, cioè la successione

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Definizione 3.28 - Forme chiuse e forme esatte

Una k -forma $\omega \in \Omega^k(M)$ si dice chiusa se $d\omega = 0$; si dice esatta se esiste $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tale che $\omega = d\eta$.

Dal fatto che il differenziale al quadrato è uguale a zero, abbiamo che una forma esatta è anche chiusa. Il punto fondamentale è che non vale il contrario.

Esempio

Sia M una n -varietà compatta orientabile e senza bordo, e consideriamo una forma volume. Essa è chiusa ma non esatta. Infatti, in generale, una n -forma su una n -varietà è sempre chiusa, in

quanto $d\omega \in \Omega^{n+1}(M) = 0$. Per vedere che la forma volume non è esatta, supponiamo per assurdo che lo sia, cioè che esista $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$ tale che $\omega = d\eta$ e applichiamo Stokes:

$$\text{Vol}(M) = \int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0, \text{ assurdo.}$$

Proposizione 3.29

Se $\omega \in \Omega^k(M)$ è esatta, allora per ogni k -sottovarietà compatta $S \subset M$, orientata e con bordo vuoto, vale che

$$\int_S \omega = \int_{\partial S} d\eta = 0.$$

Osservazione

Dal fatto che il differenziale e il pull-back commutano, allora ω è esatta se e solo se $\iota^*\omega$ è esatta.

Esempio

Consideriamo $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e usiamo coordinate polari $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times S^1$. $d\theta$ è una 1-forma in U (θ è una variabile locale, non globale). In particolare vale che

$$\int_{S^1} d\theta = 2\pi,$$

Quindi $d\theta$ non è esatta; è comunque chiusa, in quanto localmente è appunto il differenziale della funzione (locale) θ .

Definizione 3.30

M varietà qualsiasi, definiamo

$$Z^k(M) := \{k\text{-forme chiuse}\} \subset \Omega^k(M) \quad B^k(M) := \{k\text{-forme esatte}\} \subset Z^k(M).$$

Poiché $B^k(M) \subset Z^k(M)$ è un sottospazio, possiamo allora quozientare l'uno per l'altro.

Definizione 3.31 - Gruppi di coomologia e numeri di Betti

Chiamiamo k -esimo gruppo di coomologia di De Rham di M lo spazio vettoriale

$$\mathcal{H}^k(M) := \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}.$$

Chiamiamo k -esimo numero di Betti $b^k(M) := \dim(\mathcal{H}^k(M))$.

Osservazione

Se scriviamo $M = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_h$, dove le M_i sono le componenti connesse, allora sappiamo che l'insieme delle k -forme su M è la somma diretta dell'insieme delle k -forme sulle varie M_i , cioè

$$\Omega^k(M) = \Omega^k(M_1) \oplus \dots \oplus \Omega^k(M_h).$$

Analogamente, possiamo scrivere

$$Z^k(M) = \bigoplus_{i=1}^h Z^k(M_i) \quad \text{e} \quad B^k(M) = \bigoplus_{i=1}^h B^k(M_i),$$

e perciò anche la coomologia si spezza

$$\mathcal{H}^k(M) = \bigoplus_{i=1}^h \mathcal{H}^k(M_i), \quad b^k(M) = \sum_{i=1}^h b^k(M_i).$$

Proposizione 3.32

Se M è una varietà connessa, allora $\mathcal{H}^0(M) = \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Notiamo che $B^0(M) = 0$, in quanto sarebbero immagine tramite il differenziale di ” (-1) –forme” (che non ha senso, cioè c’è solo lo zero). Quindi

$$\mathcal{H}^0(M) = \frac{Z^0(M)}{B^0(M)} = \frac{\{f \text{ funzioni tali che } df = 0\}}{0}.$$

Ora notiamo che

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = 0 \iff f \text{ è localmente costante}$$

(infatti tutte le derivate si devono annullare). Ma questo risultato, con l’ipotesi che il dominio sia connesso, ci dicono che f deve essere costante su tutta M , e quindi

$$\mathcal{H}^0(M) = \{f \text{ funzioni tali che } df = 0\} = \{f \text{ costanti}\} = \mathbb{R}.$$

□

Corollario 3.33

$b^0(M) = \text{numero di componenti connesse di } M$.

Ricordiamo che

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_k \Omega^k(M)$$

era un’algebra con il prodotto wedge. Cerchiamo di trasportare tale prodotto anche sull’insieme

$$\mathcal{H}^*(M) := \bigoplus_k \mathcal{H}^k(M).$$

Otteniamo un’algebra?

Proposizione 3.34

L’operazione di prodotto wedge è ben definita su $\mathcal{H}^*$, che è quindi un’algebra. In particolare, date $[\omega] \in \mathcal{H}^k(M)$ e $[\eta] \in \mathcal{H}^h(M)$, vale che

$$[\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta].$$

Dimostrazione. Verifichiamo che:

- $\omega \wedge \eta \in Z^{k+h}(M)$; basta applicare il differenziale (stiamo supponendo che $\omega \in Z^k(M)$ e che $\eta \in Z^h(M)$):

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta = 0.$$

- $[\omega \wedge \eta]$ dipende solo da $[\omega]$ e $[\eta]$. Sia infatti $[\omega'] = [\omega]$, cioè esiste una $(k-1)$ –forma ζ tale che $\omega' = \omega + d\zeta$. Allora

$$\omega' \wedge \eta = (\omega + d\zeta) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + d\zeta \wedge \eta.$$

Dimostriamo che quest’ultima è una forma esatta, facendo vedere che è il differenziale di $\zeta \wedge \eta$:

$$d\zeta \wedge \eta = d(\zeta \wedge \eta) \pm \zeta \wedge d\eta = d(\zeta \wedge \eta),$$

dove stiamo usando che η è chiusa e quindi $d\eta = 0$.

□

Osservazione

Abbiamo anche dimostrato che il prodotto wedge tra una forma chiusa e una forma esatta è una forma esatta.

Proprietà funtoriali

Supponiamo di avere M e N varietà qualsiasi e $f : M \longrightarrow N$ liscia qualsiasi. Abbiamo una mappa indotta per pull-back

$$f^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M),$$

e siccome il pull-back commuta con il differenziale allora sono ben definite anche le relative restrizioni

$$f^* : Z^k(N) \longrightarrow Z^k(M) \quad \text{e} \quad f^* : B^k(N) \longrightarrow B^k(M).$$

Quindi è ben definita la mappa

$$f^* : \mathcal{H}^k(N) \longrightarrow \mathcal{H}^k(M).$$

Inoltre vale che $(id_M)^* = id_{\mathcal{H}^k(M)}$ e che $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Corollario 3.35

Se $\phi : M \xrightarrow{\sim} N$ è un diffeomorfismo, allora $\phi^* : \mathcal{H}^k(M) \longrightarrow \mathcal{H}^k(M)$ è un isomorfismo.

Corollario 3.36

Se $M \cong N$ allora $b^k(M) = b^k(N)$.

Proposizione 3.37

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dimostrazione. Abbiamo già visto il caso $k = 0$; inoltre, se $k \geq 2$, non ho k -forme (o meglio, sono tutte nulle), quindi $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}) = 0$. Vediamo il caso $k = 1$:

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) = \frac{\{1\text{-forme chiuse}\}}{\{1\text{-forme esatte}\}}.$$

Vale che quindi che $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) = 0 \iff$ ogni 1-forma chiusa è anche esatta. Sia $\omega = f(x)dx$ una 1-forma (tutte le 1-forme sono chiuse, in quanto $\Omega^2(\mathbb{R}) = 0$), e cerco F funzione tale che $dF = \omega$. Pongo

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \implies dF = d\left(\int f(t)dt\right) = f dx = \omega.$$

□

3.3.1 Il lemma di Poincaré

Abbiamo quindi visto che due varietà isomorfe hanno Coomologia di De Rham isomorfa. Vorremmo riuscire a estendere questo risultato, dimostrando che due varietà omotopicamente equivalenti hanno la stessa coomologia. In particolare, quello che vorremmo dimostrare è che mappe lisce tra varietà che siano anche omotope inducono la stessa mappa in coomologia. Infatti applicheremo tale risultato al caso in cui $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow M$ sono tali che

$$f \circ g \sim id_N \quad \text{e} \quad g \circ f \sim id_M,$$

per ottenere che

$$g^* \circ f^* = id_{\mathcal{H}^*(N)} \quad \text{e} \quad f^* \circ g^* = id_{\mathcal{H}^*(M)},$$

che quindi risultano isomorfe. Dimostriamo quindi

Teorema 3.38

Date M e N varietà e $f, g : M \longrightarrow N$ lisce e omotope, allora $f_* \equiv g_*$ come mappe

$$\mathcal{H}^*(N) \longrightarrow \mathcal{H}^*(M).$$

Dimostrazione. Se f e g sono lisce e sono omotope tramite un'omotopia continua, allora abbiamo visto che possiamo scegliere l'omotopia in modo che sia liscia. Fissiamo quindi

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow N$$

omotopia liscia tra f e g .

Dobbiamo cercare di definire

$$h : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

che sia un'omotopia di morfismi di complessi di catene tra f^* e g^* . Come possiamo fare? Contruendo un campo vettoriale. L'unico campo vettoriale che ci può venire in mente di contrarre è quello dato da $\frac{\partial}{\partial t}$ in $[0, 1]$. Ad ogni $t \in [0, 1]$, abbiamo la mappa

$$j_t : M \longrightarrow M \times [0, 1] \quad p \longmapsto (p, t).$$

Quale t scelgo? Beh, in realtà tutti, e poi ci faccio la media. Definiamo quindi

$$h(\omega) = \int_0^1 j_t^* \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(\omega) \right) dt,$$

ovvero

$$h(\omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 (F^*\omega)(p, t) \left(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_{k-1} \right) dt.$$

Dimostriamo che tale mappa è un'omotopia di morfismi di catene, cioè che

$$f^* - g^* = h d + d h : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M).$$

Andiamo a valutare

$$(g^* - f^*)(\omega) = (F_1^* - F_0^*)(\omega) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_t^* \omega dt.$$

Per definizione di $\mathcal{L}_X$, otteniamo che questo vale

$$\int_0^1 j_t^* \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_t^* \omega,$$

e per la formula magica di Cartan otteniamo

$$\int_0^1 j_t^* d \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} F_t^* \omega dt + \int_0^1 j_t^* \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} d F_t^* \omega dt.$$

Dimostriamo che questi ultimi due pezzi sono uguali a quello che vogliamo:

- d commuta con j_t^* , quindi

$$\int_0^1 j_t^* d \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} F_t^* \omega dt = d \int_0^1 j_t^* \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} F_t^* \omega = d h(\omega).$$

- d commuta con F^*

$$\int_0^1 j_t^* \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} d F_t^* \omega dt = \int_0^1 j_t^* \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} F_t^* (d\omega) dt = h d(\omega).$$

□

Corollario 3.39

Se M e N sono omotopicamente equivalenti, allora hanno la stessa coomologia.

Corollario 3.40

Se M è contraibile, allora ha coomologia banale, cioè

$$\mathcal{H}^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Se M è contraibile allora ha la stessa coomologia di un punto (e quindi di $\mathbb{R}$, che abbiamo già calcolato). $\square$

Teorema 3.41 - Lemma di Poincaré

Le k -forme chiuse su $\mathbb{R}^n$ sono anche esatte se $k \geq 1$

Dimostrazione. $\mathbb{R}^n$ è contraibile. $\square$

Corollario 3.42

M compatta, orientabile e senza bordo, allora M non è contraibile. Più in generale, M non è omotopicamente equivalente a nessuna varietà di dimensione inferiore.

Dimostrazione. Sotto queste ipotesi, esiste una forma volume $\omega \in \Omega^n(M)$, che è chiusa ma non esatta; quindi $b^n(M) \neq 0$. $\square$

Corollario 3.43

$S^n \sim S^m \iff n = m$.

3.3.2 Il teorema di Mayer-Vietoris

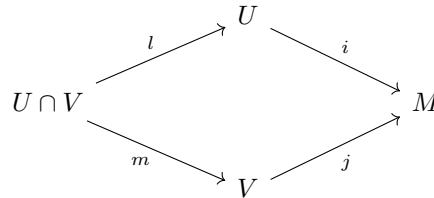
Abbiamo fin qui visto la coomologia di $\mathbb{R}^n$, ma in generale non sappiamo ancora calcolare la coomologia di una varietà qualsiasi. Vediamo ora un risultato che ci permette di calcolare la coomologia di M a partire dalla coomologia di due aperti che lo ricoprono.

Teorema 3.44 - Mayer-Vietoris

Sia M una varietà e siano U e V aperti tali che $M = U \cup V$. Allora esiste una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}^k(M) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \mathcal{H}^k(U) \oplus \mathcal{H}^k(V) \xrightarrow{l^* - m^*} \mathcal{H}^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^{k+1}(M) \longrightarrow \dots$$

dove



sono le inclusioni.

Dimostrazione. Per il Lemma del serpente, basta vedere che la successione esatta corta di complessi data da

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{l^* - m^*} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

è esatta. Lo verifichiamo facendo vedere che la successione è esatta in ogni punto:

- Verifichiamo che (i^*, j^*) è iniettiva. Ma questo è ovvio in quanto $M = U \cup V$, e quindi una forma ω tale che

$$\omega|_U \equiv 0 \quad \text{e} \quad \omega|_V \equiv 0,$$

allora $\omega \equiv 0$.

- Partiamo con il dire che $(l^* - m^*) \circ (i^*, j^*) \equiv 0$, infatti

$$(l^* - m^*)(i^*, j^*)(\omega) = (l^* - m^*)(\omega|_U, \omega|_V) = \omega|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V} = 0.$$

Quindi $\text{Imm}((i^*, j^*)) \subset \text{Ker}(l^* - m^*)$; facciamo vedere l'altra inclusione. Infatti, se

$$(l^* - m^*)(\phi, \psi) = 0,$$

allora $\phi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}$, e quindi esiste $\omega \in \Omega^*(M)$ tale che $\omega|_U = \phi$ e $\omega|_V = \psi$, e in particolare $(\phi, \psi) = (i^*, j^*)(\omega)$.

- Dimostriamo che $l^* - m^*$ è surgettiva. La cosa sicuramente falsa è che se ho una forma definita su $U \cap V$, allora questa si può estendere ad una forma su tutto U o su tutto V . Agiamo in maniera differente, ovvero consideriamo una partizione dell'unità $\{\rho_U, \rho_V\}$. Data $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$, allora $\rho_U \omega$ si può estendere ad una forma su tutto U , che chiamiamo ω_U . Infatti, possiamo porre a zero ω_U su tutto $V \setminus (U \cap V)$, ed in particolare ω_U ha supporto contenuto in U .

Analogamente, possiamo definire $\omega_V = -\rho_V \omega$. Vediamo quindi che

$$(l^* - m^*)(\omega_U, \omega_V) = l^*(\omega_U) - m^*(\omega_V) = \rho_V \omega + \rho_U \omega = \omega.$$

□

Osservazione

Se $[\omega] \in \mathcal{H}^k(U \cap V)$, allora

$$\delta([\omega]) = \begin{cases} [d\rho_V \wedge \omega] & \text{su } U \\ [-d\rho_U \wedge \omega] & \text{su } V \end{cases}.$$

Osservazione

Non si richiede alcun ipotesi sulla connessione di U , V e $U \cap V$ (al contrario del Teorema di Seifert-Van Kampen).

Il Teorema di Mayer-Vietoris ci permette di calcolare la coomologia di alcune varietà importanti.

Lemma 3.45

Data una successione esatta di spazi vettoriali

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$$

allora vale che

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(V_i) = 0.$$

La dimostrazione è stata lasciata come esercizio in una consegna.

Teorema 3.46 - Coomologia delle Sfere

Vale che

$$\mathcal{H}^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dimostrazione. Sappiamo che S^n è connessa per ogni $n(\neq 0)$, quindi $\mathcal{H}^0(S^n) = \mathbb{R}$. Andiamo a calcolare gli altri casi per induzione su n , partendo dal caso di S^1 . L'unica cosa che dobbiamo calcolare è $\mathcal{H}^1(S^1)$, in quanto S^1 è di dimensione 1 e quindi $\mathcal{H}^k(S^1) = 0$ per ogni $k \geq 2$. Cerchiamo di usare il Teorema di Mayer-Vietoris, dando la seguente suddivisione di S^1 :

$$U = S^1 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R} \quad V = S^1 \setminus \{S\} \cong \mathbb{R} \quad U \cap V \cong \mathbb{R} \setminus \{0\} \sim S^0,$$

dove N è il polo nord e S è il polo sud (ricordiamo che con il simbolo $\sim$ intendiamo che due spazi sono omotopicamente equivalenti). S^0 è l'unione di due punti, quindi ha coomologia nulla ovunque tranne che in grado zero, dove, avendo due componenti connesse, ha $\mathcal{H}^0(S^0) = \mathbb{R}^2$. Abbiamo dunque la seguente successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathcal{H}^0(S^1) & & \mathcal{H}^0(U) \oplus \mathcal{H}^0(V) & & \mathcal{H}^0(S^0) & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{H}^1(S^1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dalla quale risulta che $\mathcal{H}^1(S^1) = \mathbb{R}$ per il lemma precedente.

Dimostriamo il passo induttivo. Supponiamo quindi che la tesi sia vera per S^n , e suddividiamo S^{n+1} con gli stessi aperti definiti prima, cioè

$$U = S^{n+1} \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \quad V = S^{n+1} \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n \quad U \cap V \sim S^n.$$

Guardiamo la successione data dal Teorema di Mayer-Vietoris:

- Per $k = 0$ abbiamo già visto che la tesi vale;
- Sia $k \geq 2$ e $k \neq n + 1$, allora

$$0 \cong \mathcal{H}^{k-1}(U) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(V) \longrightarrow \mathcal{H}^{k-1}(S^n) \longrightarrow \mathcal{H}^k(S^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{H}^k(U) \oplus \mathcal{H}^k(V) \cong 0$$

Per ipotesi induttiva, siamo nel caso in cui $\mathcal{H}^{k-1}(S^n) = 0$, e siccome la mappa in mezzo è un isomorfismo, vale anche per $\mathcal{H}^k(S^{n+1})$.

- Nel caso in cui $k = n + 1$, otteniamo

$$0 \cong \mathcal{H}^n(U) \oplus \mathcal{H}^n(V) \longrightarrow \mathcal{H}^n(S^n) \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}(S^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{H}^n(U) \oplus \mathcal{H}^n(V) \cong 0$$

Sempre per ipotesi induttiva, $\mathcal{H}^n(S^n) = \mathbb{R}$, e come prima la freccia in mezzo è un isomorfismo.

□

Teorema 3.47 - Spazi proiettivi complessi

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k \text{ pari}, k \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dimostrazione. Lavoriamo ancora una volta per induzione sulla dimensione (ovvero su n , anche se la dimensione qui è $2n$). Se $n = 1$, allora $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ è diffeomorfo a S^2 , e per il teorema precedente abbiamo concluso.

Dimostriamo il passo induttivo. Supponiamo quindi vera la tesi per $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ e suddividiamo $\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}$ in questo modo: poniamo

$$U = \mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C} \setminus H_0 = U_0 \quad \text{e} \quad V = \mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C} \setminus \{[1 : 0 : \dots : 0]\}$$

dove H_0 è l'iperpiano dato da $\{z_0 = 0\}$. Sappiamo che $U \cong \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$.
 V si retrae su H_0 tramite la deformazione

$$V \times [0, 1] \longrightarrow V \quad ([z_0 : z_1 : \cdots : z_{n+1}], t) \longmapsto [(1-t)z_0 : z_1 : \cdots : z_{n+1}].$$

Dunque V è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$, per cui possiamo applicare l'ipotesi induttiva. Inoltre $U \cap V \cong \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{P\} \sim S^{2n+1}$. Escludendo il caso $k = 0$ (che sappiamo già in quanto $\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}$ è connesso), vediamo il caso $k = 1$.

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathbb{C}^{n+1}) \oplus \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^0(S^{2n+1}) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{C}^{n+1}) \oplus \mathcal{H}^1(\mathbb{P}^n \mathbb{C})$$

Per ipotesi induttiva, e per il teorema precedente otteniamo

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Da cui $\mathcal{H}^1(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) = 0$. Andiamo a vedere quando $k > 1$.

$$0 \cong \mathcal{H}^{k-1}(S^{2n+1}) \longrightarrow \mathcal{H}^k(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^k(\mathbb{C}^{n+1}) \oplus \mathcal{H}^k(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^k(S^{2n+1}) \cong 0$$

e, siccome $\mathbb{C}^{n+1}$ è contraibile e ha coomologia banale, per cui vale $\mathcal{H}^k(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^k(\mathbb{P}^n \mathbb{C})$, quando $k \neq 2n+1, 2n+2$. Infine, andiamo a vedere questi ultimi due casi:

$$0 \cong \mathcal{H}^{2n}(S^{2n+1}) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n+1}(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n+1}(\mathbb{C}^{n+1}) \oplus \mathcal{H}^{2n+1}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \cong 0$$

$$0 \cong \mathcal{H}^{2n+1}(\mathbb{C}^{n+1}) \oplus \mathcal{H}^{2n+1}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n+1}(S^{2n+1}) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n+2}(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Da cui ricaviamo che $\mathcal{H}^{2n+1}(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) = 0$ e $\mathcal{H}^{2n+2}(\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^{2n+1}(S^{2n+1}) = \mathbb{R}$. $\square$

Segue quindi che se $\iota : H \longrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è l'inclusione di un iperpiano, allora la mappa indotta $\iota^* : \mathcal{H}^k(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^k(H)$ è surgettiva.

Se K è un sottospazio proiettivo di qualsiasi co-dimensione, esprimendo K come intersezione di iperpiani segue che $\iota^* : \mathcal{H}^k(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^k(K)$ è surgettiva.

Corollario 3.48

$\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ e S^{2n} non sono diffeomorfi quando $n > 1$ (non sono nemmeno omotopicamente equivalenti).

3.3.3 Coomologia a supporto compatto

Dato $k \in \mathbb{N}$, indichiamo con

$$\Omega_c^k(M) = \{\omega \text{ } k\text{-forma a supporto compatto}\}.$$

Poiché il supporto di $d\omega$ è contenuto nel supporto di ω , allora $\Omega_c^*(M)$ è un complesso di co-catene ben definito, la cui coomologia si denota con $\mathcal{H}_c^*(M)$. In particolare, se M è compatta allora $\mathcal{H}_c^*(M) \cong \mathcal{H}^*(M)$.

Osservazione

Poiché il supporto di $\omega \wedge \eta$ è contenuto nell'intersezione dei supporti di ω e di η , allora $\mathcal{H}_c^*(M)$ ha una struttura di anello con il prodotto wedge.

Se M si decompone come unione disgiunta di un numero finito di componenti connesse $M_1, \dots, M_h$, sapevamo che $\Omega^*(M)$ si spezzava nella somma diretta delle forme definite sulle singole componenti connesse, cioè valeva che

$$\Omega^*(M) \cong \bigoplus_{i=1}^h \Omega^*(M_i).$$

La stessa cosa vale con le forme a supporto compatto, in quanto unione finita di compatti è compatto. La decomposizione resta anche in coomologia, per cui

$$\mathcal{H}_c^*(M) = \bigoplus_{i=1}^h \mathcal{H}_c^*(M_i).$$

Quello che cambia è che se abbiamo un'unione infinita (che può essere al più numerabile, in quanto le varietà sono a base numerabile), allora

$$\Omega^*(M) = \prod_{i \in I} \Omega^*(M_i), \quad \text{mentre} \quad \Omega_c^*(M) = \bigoplus_{i \in I} \Omega_c^*(M_i).$$

La differenza sostanziale è che da una parte, nel prodotto, si ammettono anche sequenze infinite, mentre nella somma si ammettono solo combinazioni finite. Quindi in coomologia otteniamo

$$\mathcal{H}_c^*(M) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_c^*(M_i).$$

Teorema 3.49

M connessa, allora

$$\mathcal{H}_c^0(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & M \text{ compatta} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Una zero-forma è una funzione, ed è chiusa se e solo se è costante (per connessione di M). Ma le funzioni costanti non nulle hanno supporto compatto se e solo se M è compatta. $\square$

Dunque, se indichiamo con $b_c^k = \dim(\mathcal{H}_c^k(M))$, allora b_c^k conta il numero di componenti compatte di M .

Teorema 3.50

Sia M una n -varietà orientata, connessa e senza bordo. Allora $\mathcal{H}_c^n(M) \neq 0$.

Dimostrazione. La mappa

$$\Omega_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \omega \longmapsto \int_M \omega$$

passa al quoziente definendo una mappa

$$\mathcal{H}_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Infatti, se ω è esatta (cioè $\omega = d\eta$) allora

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0$$

in quanto M è senza bordo. Si trova facilmente che esiste almeno una forma per cui

$$\int_M \omega = 1.$$

$\square$

Esempio

Vale che

$$\mathcal{H}_c^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Infatti sappiamo già che $\mathcal{H}_c^0(\mathbb{R}) = 0$, in quanto $\mathbb{R}$ non è compatto, e $\mathcal{H}_c^k(\mathbb{R}) = 0$ per ogni $k \geq 2$. Per concludere, basta verificare che la mappa

$$\Psi : \mathcal{H}_c^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad [\omega] \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \omega,$$

che abbiamo già visto essere surgettiva, è in realtà anche iniettiva. Sia quindi $\omega = f(x)dx$ con integrale nullo su $\mathbb{R}$ (cioè $\omega \in \text{Ker}(\Psi)$), e poniamo

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(x) := \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

(notiamo che questa funzione è ben definita in quanto f è a supporto compatto). Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo che $dg = \omega$. In più g è a supporto compatto in quanto f ha integrale nullo su $\mathbb{R}$ ed è a supporto compatto.

Funtorialità

In generale, se $f : M \longrightarrow N$ è una funzione liscia tra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$, allora $\text{supp}(f^*\omega) \subset f^{-1}(\text{supp}(\omega))$. Perciò, se vogliamo un funtore controvariante come nella coomologia standard, dovremmo ridurci alle mappe proprie. Nonostante questo, esiste un altro tipo di funtorialità, che vale solo per la coomologia a supporto compatto, ed è però covariante: ci restringiamo all'inclusione di aperti.

Se $\iota : U \longrightarrow V$ è un'inclusione tra aperti di M e $\omega \in \Omega_c^k(M)$, allora possiamo porre

$$\iota_*\omega = \begin{cases} \omega & \text{su } U \\ 0 & \text{su } V \setminus \text{supp}(\omega) \end{cases}.$$

$\iota_*\omega$ è ben definita, ed è una forma a supporto compatto in V .

Teorema 3.51 - Lemma di Poincaré

$$\mathcal{H}_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dimostrazione. Il caso $k = 0$ lo abbiamo già esaminato. Supponiamo $1 \leq k < n$, e sia $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ chiusa; consideriamo $\mathbb{R}^n$ come immersa in $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$. $\mathbb{R}^n$ è un aperto di S^n , e se

$$\iota : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n$$

possiamo considerare $\iota_*\omega \in \Omega_c^k(S^n) = \Omega^k(S^n)$ in quanto S^n è compatto. $\iota_*\omega$ è ancora chiusa (il differenziale commuta con ι_*), e poiché $\mathcal{H}^k(S^n) = 0$ allora esiste una $\phi \in \Omega^{k-1}(S^n)$ tale che

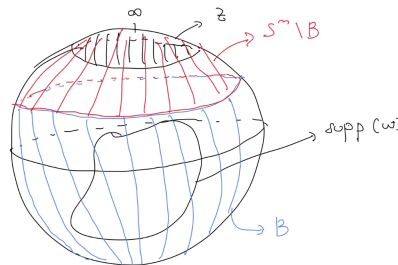
$$\iota_*\omega = d\phi.$$

Modifichiamo ϕ in modo che il suo supporto non intersechi un intorno di $+\infty$, così che la restrizione di ϕ a $\mathbb{R}^n$ abbia supporto compatto, e dia quindi la primitiva di ω richiesta.

Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ una palla contenente $\text{supp}(\omega)$. Poiché $S^n \setminus B$ è contraibile, e $d\phi|_{S^n \setminus B} = \iota_*\omega = 0$ su tale insieme, allora abbiamo che

$$\phi = d\eta$$

su $S^n \setminus B$ per qualche $\eta \in \Omega^{k-2}(S^n \setminus B)$.



Nel caso $k = 1$ basta sommare una costante, quindi supponiamo $k > 1$, e sia $\rho : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $\text{supp}(\rho) \subset S^n \setminus B$ e $\rho|_Z \equiv 1$ su un intorno Z di $+\infty$. Ora, $\rho\eta$ si estende su tutto S^n ponendola a zero su tutto B . Poniamo allora

$$\phi' = \phi - d(\rho\eta)$$

e funziona. Infatti $d\phi' = d\phi = \iota_*\omega$, e su Z $\rho \equiv 1$, per cui

$$\phi' = \phi - d(\rho\eta) = \phi - d\eta = 0.$$

Infine, nel caso in cui $k = n$. Voglio dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{H}_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

è un isomorfismo, cioè che è iniettivo (sappiamo già che è surgettivo). Se $[\omega] \in \text{Ker}$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0,$$

da cui anche

$$\int_{S^n} \iota_*\omega = 0.$$

Quindi $[\iota_*\omega] = 0$ in $\mathcal{H}^n(S^n)$. Ma già sappiamo che $\mathcal{H}^n(S^n) = \mathbb{R}$ e

$$\int_{S^n} : \mathcal{H}^n(S^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

è surgettivo, dunque isomorfismo. Quindi $\iota_*\omega$ è esatta e si conclude come nel caso $k < n$. $\square$

Possiamo anche reinterpretare il Teorema di Mayer-Vietoris per la coomologia a supporto compatto, ovvero vale il seguente

Teorema 3.52 - Mayer-Vietoris a supporto compatto

Sia $M = U \cup V$ con U e V aperti, e siano

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & i \nearrow & & \searrow l & \\ U \cap V & & & & U \cup V \\ & j \searrow & & \nearrow m & \\ & & V & & \end{array}$$

le inclusioni. Allora abbiamo una successione esatta lunga data da

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_c^k(U \cap V) \rightarrow \mathcal{H}_c^k(U) \oplus \mathcal{H}_c^k(V) \rightarrow \mathcal{H}_c^k(U \cup V) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

dove la mappa δ è data da

$$\delta([\omega]) = d\rho_v \wedge \omega = -d\rho_U \wedge \omega.$$

La successione

$$0 \rightarrow \Omega_c(U \cap V) \xrightarrow{(i_*, -j_*)} \Omega_c(U) \oplus \Omega_c(V) \xrightarrow{l_* + m_*} \Omega_c(U \cup V) \rightarrow 0$$

è esatta. L'unica cosa non banale è la surgettività di $l_* + m_*$, e si dimostra usando una partizione dell'unità legata al ricoprimento dato da U e V .

3.3.4 Dualità di Poincaré

Sia M una varietà orientata connessa e senza bordo, allora esiste una dualità tra le forme a supporto compatto e non: consideriamo la mappa

$$\Omega^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\omega, \varphi) \longmapsto \int_M \omega \wedge \varphi.$$

Per il Teorema di Stokes, questa mappa passa al quoziente definendo una mappa

$$\mathcal{H}^k(M) \times \mathcal{H}_c^{n-k}(M) \quad \langle [\omega], [\varphi] \rangle = \int_M \omega \wedge \varphi.$$

Come per ogni forma bilineare, abbiamo una mappa indotta

$$PD : \mathcal{H}^k(M) \longrightarrow \mathcal{H}_c^{n-k}(M)^* \quad PD([\omega])([\varphi]) = \langle [\omega], [\varphi] \rangle.$$

Definizione 3.53 - Poincaré Duality

Chiamiamo *Poincaré Duality* la mappa PD .

Quello che vogliamo dimostrare in questa sezione è che la Poincaré Duality è un isomorfismo. Osserviamo preliminarmente che questo è vero nel caso di $\mathbb{R}^n$; infatti, $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni $k \neq 0$, e vale lo stesso per $\mathcal{H}_c^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Dobbiamo solo verificare che

$$PD : \mathcal{H}^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}_c^n(\mathbb{R}^n)^*$$

sia un isomorfismo. Sappiamo inoltre che (astrattamente) i due spazi sono entrambi isomorfi a $\mathbb{R}$, quindi ci basta vedere che PD è surgettiva. La funzione costante 1 è un generatore per $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^n)$. e una forma $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ il cui integrale su $\mathbb{R}^n$ faccia 1 è un generatore per $\mathcal{H}_c^n(\mathbb{R}^n)$. Notiamo quindi che

$$PD(1)([\omega]) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \wedge \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1,$$

quindi PD è surgettiva, e per motivi dimensionali è un isomorfismo.

Per completare la dimostrazione, ci servono due lemmi, uno a carattere puramente algebrico e uno invece topologico. Enunciamo quindi

Lemma 3.54 - Lemma dei 5

Si consideri il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & V_4 & \longrightarrow & V_5 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon & & \\ 0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & W_4 & \longrightarrow & W_5 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con righe esatte. Se α, β, δ e ϵ sono isomorfismi, allora anche γ lo è.

Lemma 3.55

Sia $\mathcal{A}$ una collezione di aperti di M tale che

- Se $U \subset M$ è un aperto diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, allora $U \in \mathcal{A}$;
- Se $U, V \in \mathcal{A}$ e $U \cap V \neq \emptyset$, allora ci sta anche $U \cup V$;
- Se $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ e $U_i \cap U_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, allora anche $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{A}$.

Allora tutti gli aperti di M sono contenuti in $\mathcal{A}$.

Osservazione

Se la successione

$$\dots \longrightarrow V_{i-1} \longrightarrow V_i \longrightarrow V_{i+1} \longrightarrow \dots$$

è esatta, allora passando ai duali anche la successione

$$\dots \longleftarrow V_{i-1}^* \longleftarrow V_i^* \longleftarrow V_{i+1}^* \longleftarrow \dots$$

lo è.

Teorema 3.56 - Dualità di Poincaré

Data M varietà orientata e senza bordo di dimensione n , allora esiste un omomorfismo

$$PD : \mathcal{H}^k(M) \longrightarrow \mathcal{H}_c^{n-k}(M)^* \quad [\omega] \longmapsto \left([\eta] \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta \right)$$

che è un isomorfismo.

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{B} := \{U \subset M \text{ aperto per cui vale la dualità}\}$, e vogliamo dimostrare che $\mathcal{B}$ soddisfa le tre proprietà del Lemma 4.63. Vediamo quindi che:

- Se U è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, allora la tesi vale, in quanto avevamo dimostrato che valeva per $\mathbb{R}^n$ stesso.
- Se la tesi vale per U , V e $U \cap V$, allora vale anche per $U \cup V$. Andiamo a scrivere le successioni date dal Teorema di Mayer-Vietoris per la coomologia e la coomologia a supporto compatto:

$$\mathcal{H}^{k-1}(U) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(V) \longrightarrow \mathcal{H}^{k-1}(U \cap V) \longrightarrow \mathcal{H}^k(U \cup V) \longrightarrow \mathcal{H}^k(U) \oplus \mathcal{H}^k(V) \longrightarrow \mathcal{H}^k(U \cap V)$$

$$\mathcal{H}_c^{n-k+1}(U) \oplus \mathcal{H}_c^{n-k+1}(V) \longleftarrow \mathcal{H}_c^{n-k+1}(U \cap V) \longleftarrow \mathcal{H}_c^{n-k+1}(U \cup V) \longleftarrow \mathcal{H}_c^{n-k}(U) \oplus \mathcal{H}_c^{n-k}(V) \longleftarrow \mathcal{H}_c^{n-k}(U \cap V)$$

Le due successioni sono esatte, e possiamo dualizzare quella di sotto ed ottenere (per l'osservazione prima del teorema) una nuova successione esatta. Applicando il Lemma dei 5, otteniamo che anche la freccia in mezzo è un isomorfismo (le altre lo sono per ipotesi):

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{H}^{k-1}(U) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{k-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{k-1}(U \cup V) & \longrightarrow & \mathcal{H}^k(U) \oplus \mathcal{H}^k(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}^k(U \cap V) \\ \downarrow PD & & \downarrow PD & & \downarrow & & \downarrow PD & & \downarrow PD \\ \mathcal{H}_c^{n-k+1}(U)^* \oplus \mathcal{H}_c^{n-k+1}(V)^* & \longrightarrow & \mathcal{H}_c^{n-k+1}(U \cap V)^* & \longrightarrow & \mathcal{H}_c^{n-k}(U \cup V)^* & \longrightarrow & \mathcal{H}_c^{n-k}(U)^* \oplus \mathcal{H}_c^{n-k}(V)^* & \longrightarrow & \mathcal{H}_c^{n-k}(U \cap V)^* \end{array}$$

- Vediamo che se $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ sono a due a due disgiunti, allora la tesi vale anche per $\bigsqcup_{i \in I} U_i$. Ricordiamo che per le k -forme valeva che

$$\Omega^k \left(\bigsqcup_{i \in I} U_i \right) = \prod_{i \in I} \Omega^k(U_i) \quad \mathcal{H}^k \left(\bigsqcup_{i \in I} U_i \right) = \prod_{i \in I} \mathcal{H}^k(U_i),$$

mentre per le k -forme a supporto compatto avevamo

$$\Omega_c^k \left(\bigsqcup_{i \in I} U_i \right) = \bigoplus_{i \in I} \Omega_c^k(U_i) \quad \mathcal{H}_c^k \left(\bigsqcup_{i \in I} U_i \right) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_c^k(U_i).$$

Ricordiamo allora che V_i sono spazi vettoriali, allora

$$\left(\bigoplus_i V_i \right)^* = \prod_i V_i^*,$$

perciò abbiamo la catena di isomorfismi

$$\mathcal{H}^k\left(\bigsqcup_{i \in I} U_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{H}^k(U_i) \xrightarrow{PD} \prod_{i \in I} \mathcal{H}_c^{n-k}(U_i)^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_c^{n-k}(U_i)\right)^* \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{H}_c^{n-k}\left(\bigsqcup_{i \in I} U_i\right)\right)^*,$$

e la mappa risultante è proprio PD .

□

Corollario 3.57

Se M è orientabile e senza bordo, allora $b^k(M) = b_c^{n-k}(M)$.

Se M è anche compatta, allora $b^k(M) = b^{n-k}(M)$.

Teorema 3.58

M compatta, orientabile e senza bordo, allora $b^k(M) < +\infty$ per ogni k .

Dimostrazione. Basta vedere che la composizione di PD con la sua mappa duale PD^* è un isomorfismo, in quanto composizione di isomorfismi:

$$\mathcal{H}^k(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{n-k}(M)^* \longrightarrow \mathcal{H}^K(M)^{**}.$$

In generale, dato V spazio vettoriale, abbiamo sempre un embedding di V all'interno del suo bi-duale, dato da

$$V \longrightarrow V^{**} \quad v \longmapsto (w \longmapsto w^*(v)).$$

Per un teorema di algebra lineare, questa mappa è un isomorfismo se e solo se la dimensione di V è finita, e con questo trucco si conclude la dimostrazione (in quanto V e V^{**} sono isomorfi). □

Notiamo che in realtà questo teorema non necessita delle ipotesi di orientabilità e $\partial M = \emptyset$.

Definizione 3.59 - Caratteristica di Eulero-Poincaré

Se M è una varietà compatta, possiamo definire la sua caratteristica di Eulero-Poincaré come il numero dato da

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i b^i(M).$$

Presa quindi M compatta, orientabile e senza bordo, segue subito dalla definizione che se la dimensione di M è dispari allora ha caratteristica di Eulero nulla. Un esempio è il calcolo della caratteristica di Eulero delle Sfere, che risulta essere

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 2 & n \text{ pari} \end{cases}.$$

Possiamo anche togliere l'ipotesi di orientabilità: infatti, la caratteristica di Eulero è additiva, cioè se M riveste N con un rivestimento di grado d , allora

$$\chi(M) = d\chi(N).$$

Nel caso non orientabile, sappiamo che N ammette un rivestimento di grado 2 orientabile, e sappiamo quindi che

$$0 = \chi(M) = 2\chi(N),$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che lo abbiamo già dimostrato per le varietà orientabili.

Nel caso di dimensione pari, invece, (sempre con M compatta, orientabile e senza bordo e indichiamo con $2n$ la sua dimensione) la forma bilineare indotta da PD , cioè

$$\mathcal{H}^n(M) \times \mathcal{H}^n(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ([\omega], [\eta]) \longmapsto \int \omega \wedge \eta,$$

è una forma bilineare non degenerare. Inoltre, dal momento che

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{hk} \eta \wedge \omega, \quad \text{con } \omega \in \Omega^k(M) \text{ e } \eta \in \Omega^h(M),$$

se la dimensione di M è divisibile per 4 allora tale forma è simmetrica, quindi un prodotto scalare con una determinata segnatura. Possiamo chiamare *segnatura di M* la segnatura del prodotto scalare indotto dalla dualità.

Corollario 3.60

Se indichiamo con $\sigma(M)$ la segnatura di M (con M varietà compatta, **orientata** e senza bordo, la cui dimensione è divisibile per 4), allora

$$\sigma(-M) = -\sigma(M),$$

dove con $-M$ indichiamo M dotata dell'orientazione opposta.

Definizione 3.61 - Varietà specchiabile

M 4-varietà orientata, o comunque con dimensione divisibile per 4, si dice specchiabile se esiste un diffeomorfismo di M in sé stessa che inverte l'orientazione.

Corollario 3.62

Se M è specchiabile, allora $\sigma(M) = 0$.

Un risultato interessante è che, ad esempio, $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ non è specchiabile. Infatti, $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ è una 4-varietà che ha $\mathcal{H}^2(\mathbb{P}^2\mathbb{C}) = \mathbb{R} \implies b^2 = 1$, e perciò $\sigma(\mathbb{P}^2\mathbb{C}) \pm 1 \neq 0$.

3.3.5 Formula di Kunneth

Per concludere la parte sulla coomologia, ci piacerebbe capire cosa succede alla coomologia del prodotto di due varietà $M \times N$. Vediamo che le mappe

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\pi_M} & M \\ \pi_N \downarrow & & \\ N & & \end{array}$$

inducono sulle forme la mappa

$$\Omega^k(M) \times \Omega^h(N) \longrightarrow \Omega^{k+h}(M \times N) \quad (\omega, \eta) \longmapsto \pi_M^*(\omega) \wedge \pi_N^*(\eta).$$

A sua volta, abbiamo una mappa indotta in coomologia

$$\mathcal{H}^k(M) \times \mathcal{H}^h(N) \longrightarrow \mathcal{H}^{k+h}(M \times N) \quad ([\omega], [\eta]) \longmapsto [\pi_M^*(\omega) \wedge \pi_N^*(\eta)]$$

che è bilineare, e che quindi fattorizza per il prodotto tensoriale dei due spazi.

Teorema 3.63 - Formula di Kunneth

Sotto le fortissime ipotesi di "almeno una delle due varietà non faccia schifo" (che si traduce formalmente in $b^i(M) < +\infty$), allora la mappa

$$\bigoplus_{k+h=p} \mathcal{H}^k(M) \otimes \mathcal{H}^h(N) \longrightarrow \mathcal{H}^p(M \times N)$$

è un isomorfismo. Si può anche riscrivere come

$$\mathcal{H}^*(M) \otimes \mathcal{H}^*(N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*(M \times N)$$

Corollario 3.64

$$b^p(M \times N) = \sum_{k+h=p} b^k(M) b^h(N).$$

Possiamo calcolare, ad esempio, i numeri di betti del Toro: vedendo T come il prodotto $S^1 \times S^1$, allora abbiamo

$$b^2(T) = b^0(T) = 1 \quad b^1(T) = b^1(S^1)b^0(S^1) + b^0(S^1)b^1(S^1) = 1 + 1 = 2.$$

Possiamo anche calcolare i numeri di betti del Toro n -dimensionale, che risultano essere

$$b^k(T^n) = \binom{n}{k}.$$

Corollario 3.65

$$\chi(T^n) = 0.$$

Dimostrazione. Deriva dal fatto che

$$\chi(T^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

sviluppando il binomio di Newton. □

Esercizio

Possiamo ora distinguere delle varietà che prima non potevamo. Consideriamo le 4-varietà S^4 , $S^2 \times S^2$ e $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$, che sono tutte compatte, orientabili, senza bordo, connesse e semplicemente connesse. Possiamo vedere che hanno numeri di betti diversi: per tutte vale che $b^4 = b^0 = 1$ per dualità di Poincaré e per connessione, e analogamente abbiamo visto che $b^3 = b^1 = 0$. Concentrandoci su b^2 , notiamo che

$$b^2(S^4) = 0 \quad b^2(S^2 \times S^2) = 1 \quad b^2(\mathbb{P}^2\mathbb{C}) = 2,$$

e perciò non possono essere diffeomorfe, in quanto non sono nemmeno omotopicamente equivalenti.

3.4 Gruppi di omotopia superiore

Introduciamo e vediamo di sfuggita invece la teoria dell'omotopia. A Geometria 2 è stato introdotto il gruppo fondamentale, chiamato anche primo gruppo di omotopia. Una delle prime cose che si nota è che tale gruppo ha una forte corrispondenza con le mappe

$$\gamma : S^1 \longrightarrow X$$

a meno di omotopia. La costruzione dei gruppi di omotopia superiori ricalca questa idea.

Definizione 3.66 - K-esimo gruppo di omotopia

Sia X uno spazio topologico connesso. Chiamiamo k -esimo gruppo di omotopia di X , e lo indichiamo con $\pi_k(X)$, il gruppo

$$\pi_k(X) = [S^k; X] = \{f : S^k \longrightarrow X\} / \sim,$$

dove la relazione $\sim$ è la relazione di omotopia.

Ci sono delle analogie con il $\pi_1(X)$, ad esempio la funtorialità: una mappa continua f tra due spazi topologici X e Y induce un omomorfismo f_* tra tutti i gruppi di omotopia. Altre cose invece sono diverse, ad esempio non bisogna più considerare il punto base.

Ci sono delle buone notizie: π_k è abeliano quando $k \geq 2$, al contrario di π_1 , e se abbiamo un rivestimento

$$p : X \longrightarrow Y,$$

allora

$$p_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y) \text{ è iniettiva,}$$

$$p_* : \pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(Y) \text{ è un isomorfismo quando } k \geq 2.$$

Le buone notizie sono finite. I gruppi di omotopia sono molto più difficili da calcolare rispetto alla coomologia (ed è per questo che si preferisce quest'ultima). Infatti, anche i gruppi di omotopia di spazi relativamente semplici sono tutt'ora sconosciuti: in generale non sappiamo dire chi sia $\pi_k(S^n)$, al variare di k e n . Abbiamo però il seguente

Teorema 3.67

Se $k < n$, allora

$$\pi_k(S^n) = 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che ogni mappa

$$f : S^k \longrightarrow S^n$$

è omotopa ad un punto. Sappiamo che se f è continua allora è omotopa ad una funzione liscia g . Siccome g è liscia e ha come dominio una varietà di dimensione minore di n , non può essere surgettiva (in realtà vale che l'immagine di g è un insieme di misura nulla, condizione molto più forte).

Quindi esiste un punto che non sta nell'immagine, chiamiamolo p . Posso pensare allora

$$g : S^k \longrightarrow S^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n.$$

Ma $\mathbb{R}^n$ è contraibile, e tutte le funzioni sono omotope ad una funzione costante. □

Fatto

Vale che

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}.$$

Inoltre, al contrario di quello che ci aspetteremmo guardando alla coomologia, i gruppi di omotopia non si annullano quando $k > n$. Un esempio è

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z},$$

(al contrario di $\mathcal{H}^3(S^2) = 0$) che è generato da una mappa

$$\pi : S^3 \longrightarrow S^2,$$

che viene chiamata fibrazione di Hopf (con fibra S^1).

Le cose vanno ancora peggio quando $k \gg n$ (nel senso che non abbiamo la più pallida idea di cosa accada).

Capitolo 4

Geometria differenziale

Fino ad ora abbiamo parlato di varietà lisce, che sono oggetti intrinsecamente topologici, non geometrici. Per parlare di Geometria, dobbiamo introdurre il concetto di lunghezza e conseguentemente di distanza tra punti; per le varietà lisce (in generale) non riusciamo a parlare di lunghezza e tanto meno di distanza. Abbiamo però dimostrato che su ogni varietà esiste un tensore metrico, ovvero una scelta di un prodotto scalare definito positivo sul tangente alla varietà in p , e che varia in maniera liscia rispetto a p . Vediamo che l'utilizzo di un tensore metrico è sufficiente ad introdurre una distanza sulla varietà.

4.1 Varietà Pseudo-Riemanniane

Richiamiamo la seguente

Definizione 4.1 - Tensore metrico

Un tensore metrico su M è un campo tensoriale g di tipo $(0,2)$ su M tale che, per ogni $p \in M$, $g(p)$ è un prodotto scalare di segnatura fissata (m, n) .

Definizione 4.2 - Varietà Pseudo-Riemanniana, Riemanniana e Lorentziana

(M, g) si dice varietà Pseudo-Riemanniana di segnatura (m, n) (con g come sopra).

M si dice Riemanniana se la segnatura è definita positiva.

M si dice Lorentziana se la segnatura è del tipo $(n - 1, 1)$.

Vediamo qualche esempio: consideriamo $\mathbb{R}^n$, che possiamo denotare con il prodotto scalare di segnatura (p, q) . Quello che stiamo scegliendo è dunque un prodotto scalare che è costante rispetto alla scelta di $p \in \mathbb{R}^n$, e che è rappresentato in una determinata base come

$$g = \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

Indichiamo tale spazio con $\mathbb{R}^{p,q}$, che è quindi una varietà Pseudo-Riemanniana. Come abbiamo visto precedentemente, lo spazio-tempo di Minkowski è una varietà Pseudo-Riemanniana (in realtà è Lorentziana).

4.1.1 Varietà Lorentziane

Vediamo più in dettaglio le varietà Lorentziane. Sia quindi M una varietà Lorentziana, cioè (M, g) è una varietà munita di un tensore metrico di segnatura $(n - 1, 1)$.

Fissato $p \in M$, esiste dunque una base ortonormale $(v_1, \dots, v_n)$ di $T_p M$ tale che $g(p)$ risulta essere

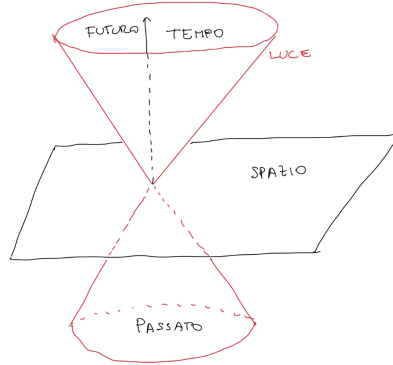
$$g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso abbiamo quindi 3 tipi di vettori, a seconda del prodotto scalare con sé stessi: utilizzando la base sopra, allora $T_p M$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1,1}$, quindi il prodotto scalare di un elemento x è dato da

$$\langle x, x \rangle = -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Abbiamo quindi la seguente classificazione:

- x si dice vettore di tipo tempo se $\langle x, x \rangle < 0$;
- x si dice vettore di tipo luce se $\langle x, x \rangle = 0$;
- x si dice vettore di tipo spazio se $\langle x, x \rangle > 0$.



Nel caso Lorentziano i vettori di tipo luce formano sempre due componenti connesse, date dalla divisione $x_1 < 0$ o $x_1 > 0$. Chiamiamo passato la prima componente e futuro la seconda. Tutto questo seguiva dall'aver fissato una base di $T_p M$ ortonormale per g , e quindi un'orientazione; perciò cambiando base, potrebbero anche cambiare anche le tipologie dei vettori.

Definizione 4.3 - Orientazione temporale sui tangenti

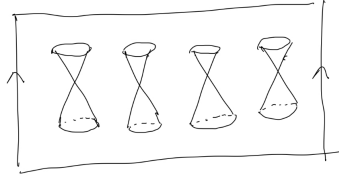
Un'orientazione temporale per $T_p M$ è la scelta di una componente connessa temporale che chiamiamo futuro e una che chiamiamo passato.

Definizione 4.4 - Orientazione temporale su una varietà

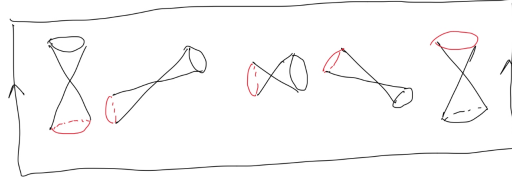
Un'orientazione temporale su una varietà Lorentziana M è un'orientazione su ogni $T_p M$ che sia continua in p .

Questo vuol dire che per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno aperto U_p e un campo $X \in \mathfrak{X}(U_p)$ mai nullo tale che $X(q)$ è di tipo tempo futuro per ogni $q \in U_p$.

Una cosa importante da notare è che la proprietà di avere un'orientazione temporale non ha nulla a che vedere con la proprietà di essere orientabile come varietà. Infatti, possiamo costruire degli esempi di varietà orientabili e non, che non hanno (o che hanno) un'orientazione temporale. Ad esempio, possiamo considerare il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, dove una volta lo quozientiamo per avere un anello e una volta lo quozientiamo per avere un nastro di Möbius.



Nel primo caso, per ottenere una varietà con un'orientazione temporale basterà considerare una scelta di vettori di tipo tempo futuro costante. Al contrario, per ottenere una varietà senza orientazione temporale, basterà "girare" questa scelta.



Il caso del Möbius è analogo.

Quello che però è veramente interessante è che non tutte le varietà ammettono una struttura Lorentziana (come invece accade nel caso Riemanniano, dove abbiamo visto che esiste sempre un tensore metrico definito positivo).

Proposizione 4.5

M varietà qualsiasi ammette una struttura Lorentziana se e solo se ha un campo vettoriale mai nullo.

Dimostrazione. Vediamo separatamente le due implicazioni:

- ($\longrightarrow$) Localmente esiste sempre un campo "futuro", cioè per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto U_p e $X_p \in \mathfrak{X}(U_p)$ tale che $X_p(q)$ è di tipo futuro per ogni $q \in U_p$. Uso quindi una partizione dell'unità per costruire $X \in \mathfrak{X}(M)$ come

$$X(q) = \sum_{p \in M} \rho_p(q) X_p(q).$$

Funziona perché combinazioni convesse di vettori di tipo futuro sono ancora di tipo futuro.

- Sia X un campo mai nullo, e g un tensore metrico definito positivo. Normalizziamo X usando g , cioè riscriviamo $X(p)$ come

$$X'(p) = \frac{X(p)}{\|X(p)\|_g}$$

(e lo chiamiamo sempre X). Ricordiamo che X è un campo di tipo $(1,0)$, mentre g è di tipo $(0,1)$, e definiamo quindi un nuovo tensore h come

$$h(v, w) = g(v, w) - 2g(v, X(p))g(w, X(p)).$$

Abbiamo costruito un nuovo campo tensoriale di tipo $(0,2)$, e vorremmo che fosse simmetrico. Notiamo innanzi tutto che h è Lorentziano, in quanto

$$h_{ij} = g_{ij} - 2g_{il}X^l g_{im}X^m.$$

Prendo quindi in p una base $(v_1, \dots, v_n)$ ortonormale per g , in cui pongo $X(p) = v_1$. Rispetto a questa base,

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

per cui

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

□

4.1.2 Lo spazio iperbolico

Introduciamo ora la varietà Riemanniana più importante di tutte, ovvero lo spazio iperbolico.

Modifica conforme

Se (M, g) è una varietà pseudo-Riemanniana e $f : M \rightarrow (0, +\infty)$, allora possiamo definire un nuovo prodotto scalare dato da $g' = fg$, ovvero

$$g'(p)(v, w) = f(p)g(p)(v, w).$$

In particolare, se f non è costante la geometria della varietà cambia moltissimo. Ci sono però alcune cose che rimangono invariate, come ad esempio gli angoli tra vettori: se prendiamo $v, w \in T_p M$, possiamo definire l'angolo tra di loro come

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \right).$$

Chiamando θ' l'angolo tra v e w misurato rispetto al prodotto scalare g' , allora vale che

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \right) = \arccos \left(\frac{f(p)\langle v, w \rangle}{f(p)\|v\| \cdot \|w\|} \right) = \theta'.$$

Vediamo quindi alcuni modelli conformi dello spazio iperbolico. Partiamo dalla palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, ovvero da

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_E^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

dove il pedice E indica che stiamo prendendo la norma rispetto al prodotto scalare standard. Chiamando g^E il tensore metrico euclideo, introduciamo un nuovo tensore metrico dato da

$$g(p) = \left(\frac{2}{1 - \|p\|_E^2} \right)^2 g^E.$$

Possiamo costruire analogamente lo spazio iperbolico nel seguente modo: consideriamo

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

il semispazio superiore, dotato del tensore metrico

$$g = \frac{1}{x_n^2} g^E.$$

Come facciamo a capire che queste due costruzioni danno, geometricamente parlando, la stessa varietà? Notiamo che non stiamo più cercando di capire se queste due varietà sono diffeomorfe (ed in particolare lo sono): avendo aggiunto un tensore metrico, vogliamo capire se esiste una mappa dall'una verso l'altra che mantenga invariata la struttura aggiuntiva che deriva dal tensore metrico. Quello che dobbiamo fare è dare la seguente

Definizione 4.6 - Isometria

Un'isometria tra due varietà Riemanniane (M, g) e (N, h) è un diffeomorfismo

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

che rispetta il prodotto scalare, ovvero tale che $\varphi^*h = g$.

Diciamo che due varietà pseudo-Riemanniane sono isometriche se esiste un'isometria tra di esse. Le isometrie di una varietà M in sé stessa definiscono un gruppo, che indichiamo come $\text{Isom}(M)$. Cerchiamo quindi di dimostrare che i due modelli dello spazio iperbolico che abbiamo introdotto in precedenza sono isometrici.

Definizione 4.7 - Inversione lungo una sfera

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, consideriamo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

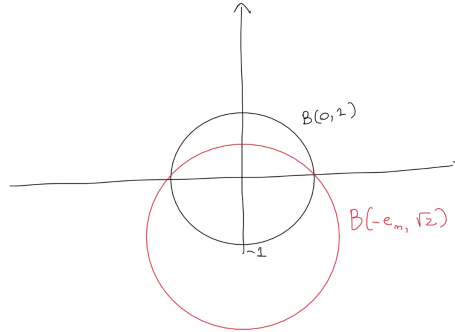
la sfera centrata in x_0 e di raggio r . Definiamo l'inversione lungo S come la mappa

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \quad x \longmapsto x_0 + r^2 \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2}.$$

Le inversioni lungo le sfere hanno alcune buone proprietà, e sono in un certo modo collegate alle riflessioni attraverso gli iperpiani. Le abbiamo introdotte per il seguente motivo:

Teorema 4.8

L'inversione φ attraverso la sfera centrata in $-e_n$ e di raggio $\sqrt{2}$ è mappa isometricamente $\mathbb{B}^n$ in $\mathbb{H}^n$.



Avendo dimostrato che i due modelli sono isometrici, allora possiamo indicare lo spazio iperbolico con il simbolo $\mathbb{H}^n$, e ci riferiremo ad uno di questi due modelli indistintamente (non ve ne è uno privilegiato).

Consideriamo lo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$ con il tensore metrico costante

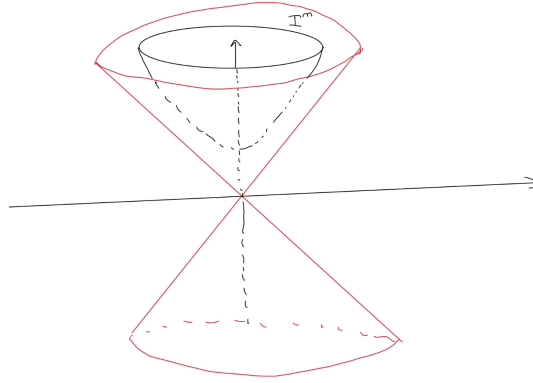
$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

La falda superiore dell'iperboloide, ovvero lo spazio

$$I^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1, x_1 > 0\}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{n,1}$, in cui lo spazio tangente ad un punto è dato da

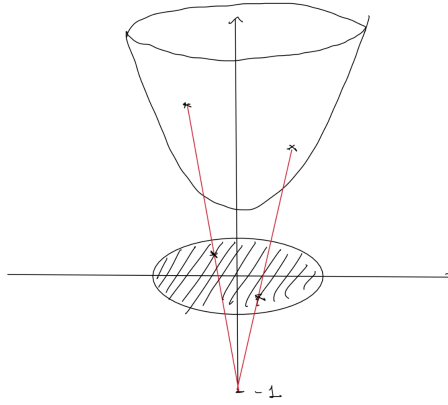
$$T_p I^n = p^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, p \rangle = 0\}.$$



Tutti i vettori in $T_p I^n$ sono di tipo spazio, e quindi la restrizione di del tensore metrico a $T_p I^n$ è definita positiva, rendendo I^n una sottovarietà Riemanniana. L'iperboloide, in particolare, è un altro modello dello spazio iperbolico: per costruire un'isometria, si consideri il modello della palla embedded in $\mathbb{R}^{n,1}$, ovvero tramite la mappa

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, \dots, x_n).$$

Allora si prende φ come la proiezione attraverso il punto $P = (-1, 0, \dots, 0)$.



4.1.3 Varietà Riemanniane come spazi metrici

Data (M, g) varietà pseudo-Riemanniana e una curva

$$\gamma : I \longrightarrow M,$$

possiamo definire la lunghezza di γ come

$$\ell(\gamma) := \int_I \|\gamma'(t)\|_g dt.$$

Definizione 4.9 - Riparametrizzazione

Siano $J, I \subset \mathbb{R}$ intervalli aperti, e

$$\varphi : J \longrightarrow I$$

una funzione liscia monotona (ci basta che la derivata sia sempre ≥ 0 o ≤ 0) e surgettiva.

Una riparametrizzazione di una curva

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

è una curva data da

$$\gamma \circ \varphi : J \longrightarrow M.$$

Fatto

La lunghezza di una curva, per come è stata definita, è invariante per riparametrizzazione.

Definizione 4.10

Una curva γ si dice di tipo spazio/tempo/luce se $\gamma'(t)$ è di tipo spazio/tempo/luce per ogni $t \in I$ (e in particolare γ è regolare).

Quindi una curva regolare ha lunghezza nulla se e solo se γ è di tipo luce.

La possibilità di misurare la lunghezza delle curve si rivela molto interessante soprattutto nel caso Riemanniano. Infatti, in questo caso le curve (non costanti) hanno lunghezza positiva, e possiamo provare a definire la distanza tra due punti come

$$d(p, q) := \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ connette } p \text{ a } q\}.$$

In effetti, questa è una distanza su M .

Lemma 4.11

Sia $D^n \subset \mathbb{R}^n$ il disco unitario e sia g un tensore metrico qualunque su D^n ; allora $\forall x \in D^n$ e $\forall v \in T_x D^n$ esistono m e M tali che

$$m\|v\|_E \leq \|v\|_g \leq M\|v\|_E.$$

Dimostrazione. La funzione

$$D^n \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, v) \longmapsto \|v\|_{g(x)}$$

è una funzione continua da un compatto in $\mathbb{R}$. Per il Teorema di Weierstrass, essa ammette un minimo m e un massimo M . $\square$

Proposizione 4.12

d definita come sopra è una distanza.

Dimostrazione. Verifichiamo che d rispetta i 3 assiomi delle distanze:

- $d(p, q) \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $p = q$. Ovviamente, se $p = q$ la distanza tra di loro è nulla; dimostriamo l'altra implicazione. Consideriamo una carta che contiene p ma non q , che manda p nell'origine di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo un disco chiuso che contiene l'origine, e abbiamo due tensori metrici: quello euclideo g_E e quello dato dal push-forward di g , cioè φ^*g . Appliciamo il Lemma: esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\ell(\gamma) > \varepsilon$ per ogni γ a valori in M che collega p a q . Come facciamo a dimostrare tale fatto? Semplicemente prendiamo una curva γ qualsiasi che connette i due punti: esisterà un t_0 per cui $\gamma(t_0)$ uscirà dal disco, per cui la lunghezza di γ è almeno m (oppure 1 per la lunghezza euclidea).
- La simmetria è ovvia.
- Dimostriamo la disuguaglianza triangolare. Date α che connette p a q e β che connette q a r , possiamo parametrizzarle in modo che α arrivi un po' prima in q e β parta un po' dopo (per quanto detto prima, la lunghezza delle due curve non cambia riparametrizzandole). Adesso la loro giunzione è una curva liscia, e la lunghezza della giunzione è uguale alla somma delle lunghezze.

$\square$

Una cosa leggermente più complicata da dimostrare è che la topologia indotta su M dalla distanza d coincide con la topologia pre-esistente di M .

Abbiamo già visto che una varietà pseudo-Riemanniana (o meglio, la scelta di un tensore metrico g) induce una forma volume. Possiamo scrivere questa forma volume in coordinate in questo modo: se $g_{ij}(x) = g(x)$ sono le coordinate del tensore, allora

$$\omega_g(x) = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Ad esempio, lavorando con lo spazio iperbolico nel modello del semispazio, allora

$$g(x) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2},$$

e la forma volume corrispondente è

$$\omega_g(x) = \frac{1}{x_n^2} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

4.2 Connessioni

Introduciamo uno degli oggetti più utili ed importanti. A suo tempo, avevamo introdotto la derivata di Lie come la derivata di un campo tensoriale rispetto ad un altro campo, però non riuscivamo comunque a derivare un campo rispetto ad un singolo vettore. Con le connessioni, riusciamo a connettere gli spazi tangenti (cosa che non si può fare su varietà qualsiasi, come abbiamo visto e sta visto).

Definizione 4.13 - Connessione

M varietà, una connessione su M è un procedimento che, dato un vettore $v \in T_p M$ con $p \in M$ e dato $X \in \mathfrak{X}(U_p)$, produce un nuovo vettore in $T_p M$, che indichiamo con

$$\nabla_v X,$$

con le seguenti proprietà:

- è locale: se $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$ sono tali che $X|_{U_p} \equiv X'|_{U_p}$ su U_p intorno di p , allora

$$\nabla_v X = \nabla_v X';$$

- è lineare, sia rispetto a v che rispetto a X :

$$\nabla_v(\lambda X + \mu Y) = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_v Y$$

$$\nabla_{\lambda v + \mu w} X = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_w X;$$

- vale Leibniz, cioè

$$\nabla_v(fX)(p) = (\nabla_v f)X(p) + f(p)(\nabla_v X),$$

dove intendiamo

$$\nabla_v f = v(f) \in \mathbb{R};$$

- è liscia, cioè se abbiamo X e Y campi in un qualsiasi aperto U di M , per ogni $p \in U$ vale che

$$\nabla_X Y(p) := \nabla_{X(p)} Y,$$

cioè

$$\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(U).$$

Le connessioni (che dobbiamo ancora dimostrare che esistono) non sono uno spazio vettoriale: non esiste la connessione zero. Se volessi ad esempio definirla come

$$\nabla_v X = 0$$

per ogni v e X , non vale Leibniz. Infatti,

$$0 = \nabla_v(fX)(p) = v(f)X(p) + f(p)\nabla_v X;$$

per definizione anche $\nabla_v X = 0$, ma in generale $v(f)X(p) \neq 0$, quindi non è una connessione. Inoltre, la somma di due connessioni non è una connessione.

Vediamo cosa accade in coordinate: sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia ∇ una connessione su U . Consideriamo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in T_0 U \cong \mathbb{R}^n$. Scriviamo $v = v^i e_i$, dove e_i è la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $X = X^j \partial_j$, e vediamo che

$$\nabla_v X = \nabla_{v^i e_i} \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \underset{\text{linearità}}{=} v^i \nabla_{e_i} \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \underset{\text{Leibniz}}{=} v^i \left(\nabla_{e_i} X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + v^i X^j \left(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Definizione 4.14 - Simboli di Christoffel

Definiamo i simboli di Christoffel della connessione ∇ , e li indichiamo con Γ_{ij}^k , i coefficienti per cui

$$\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Continuando la formula di prima, otteniamo

$$\nabla_v X = v^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + v^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Questa formula è **importantissima**. Se la analizziamo meglio, vediamo che

- il primo pezzo è la classica derivata direzionale di X rispetto al vettore v , e non dipende dalla connessione ∇ che stiamo considerando.
- il secondo pezzo è come se fosse un "addendo correttivo", e in realtà ha delle proprietà migliori di quelle che ci potremmo aspettare: infatti dipende solo da ∇ e da $X(p)$ (nel senso che ha una dipendenza puntuale da X), ed è lineare rispetto a v e $X(p)$.

In generale si può anche fare il contrario, cioè scegliere delle funzioni lisce

$$\Gamma_{ij}^k : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

e usare la formula di prima per definire una connessione. Quindi i simboli di Christoffel determinano ∇ su U .

Osservazione

Supponiamo di avere una varietà M dotata di una connessione ∇ (da ora in poi scriveremo semplicemente (M, ∇)), e siano $p \in M, v \in T_p M$ e $X \in \mathfrak{X}(U_p)$. Sappiamo che $\nabla_v X$ è un ancora un vettore in $T_p M$. Consideriamo una curva γ che sia tangente a v , cioè

$$\gamma : I \longrightarrow M \quad \gamma(0) = p \quad \gamma'(0) = v.$$

Se X' è un altro campo che coincide con X su γ , ovvero tale che

$$X'(\gamma(t)) = X(\gamma(t)) \quad \forall t \in I,$$

allora

$$\nabla_v X' = \nabla_v X,$$

cioè $\nabla_v X$ è determinato univocamente da cosa fa X su una curva tangente a v . Infatti, guardando la formula che abbiamo scritto prima, la prima parte di entrambi coincide perché una derivata direzionale (che è fatta rispetto al vettore tangente alla curva, e i due campi coincidono sulla curva), mentre la seconda è puntuale (sempre perché i due campi coincidono su tutta la curva, e in particolare in p).

Definizione 4.15 - Campo su una curva

Sia $\gamma : I \rightarrow M$ una curva su M . Diciamo che

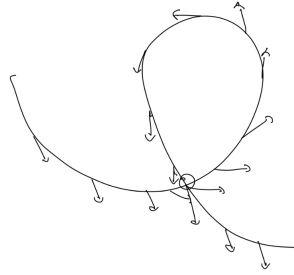
$$X : I \rightarrow TM$$

è un campo lungo γ se $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Notiamo che se γ si autointerseca, cioè se esistono $t_0 \neq t_1$ tali che $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = p$, e X è un campo su γ , allora può essere che

$$X(t_0) \neq X(t_1),$$

anche se entrambi sono relativi al punto p (cioè i campi su una curva sono diversi dai campi vettoriali classici).



Definizione 4.16

Sia $\gamma : I \rightarrow M$ una curva su una varietà (M, ∇) , e X campo lungo γ . Possiamo definire la derivata di X lungo γ , ovvero il campo $D_t X$.

Nel caso γ sia regolare, allora è localmente un embedding. Possiamo allora vedere un campo X lungo γ come un campo vettoriale classico definito sul supporto della curva, e lo possiamo estendere a $\tilde{X}$ in un intorno di tale supporto. Definiamo allora

$$\nabla_{\gamma'(t_0)} \tilde{X} := D_t X(t_0).$$

Questa definizione non dipende dalla particolare estensione $\tilde{X}$ che abbiamo scelto, in quanto $\nabla_{\gamma'(t_0)} \tilde{X}$ dipende solo da come si comporta $\tilde{X}$ su γ (e ogni estensione di X corrisponde proprio a X quanto ristretta alla curva).

In carte otteniamo che

$$D_t(X) = \gamma'(t)^i \frac{\partial X}{\partial x^i} + \gamma'(t)^i X^j \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) e_k.$$

Vorremmo estendere la derivata di un campo definito su una curva anche al caso in cui la curva non sia regolare; sfortunatamente, se γ non è regolare allora non ha senso scrivere $\gamma'(t)^i$ nella prima parte, in quanto il campo potrebbe cambiare anche se γ rimane costante in un punto. Possiamo però reinterpretare la formula sopra come

$$D_t X = \frac{dX}{dt} + \gamma'(t)^i X^j \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) e_k;$$

questa formula si estende anche al caso in cui γ non sia regolare.

4.2.1 Trasporto parallelo

Definizione 4.17 - Campo parallelo

Dati (M, ∇) , $\gamma : I \rightarrow M$ curva su M e X campo su γ , allora diciamo che X è parallelo se

$$D_t X \equiv 0.$$

In carte, X è parallelo se e solo se

$$\frac{dX}{dt} = -\dot{\gamma}^i X^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) e_k;$$

se vogliamo levare la dipendenza da t possiamo semplicemente scrivere

$$\frac{dX}{dt} = -\dot{\gamma}^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Quello che otteniamo è un sistema di equazioni differenziali lineari (ma non a coefficienti costanti) con incognite le funzioni

$$X^i : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Teorema 4.18

Fissato $t_0 \in I$, $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, allora esiste un unico X campo parallelo su γ che estende v , cioè tale che

$$X(t_0) = v.$$

Dimostrazione. In carte, la tesi diventa un problema di Cauchy, dato dalle condizioni

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\dot{\gamma}^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k \\ X(t_0) = v \end{cases}.$$

Sappiamo quindi che, localmente, la soluzione esiste ed è unica per il Teorema di Cauchy-Lipschitz. Ma essendo un'equazione lineare, allora possiamo estendere tale soluzione globalmente. $\square$

Definizione 4.19 - Trasporto parallelo

Data la varietà (M, ∇) , il trasporto parallelo lungo γ è la mappa

$$\Gamma_{t_0}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

dove un vettore $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ viene esteso all'unico campo parallelo X su γ , e viene associato $X(t_1)$.

Proposizione 4.20

Il trasporto parallelo è un isomorfismo, e inoltre vale che

$$\Gamma_{t_0}^{t_2}(\gamma) = \Gamma_{t_1}^{t_2}(\gamma) \circ \Gamma_{t_0}^{t_1}(\gamma).$$

Dimostrazione. La formula è ovvia, in quanto l'estensione è unica; vediamo che il trasporto parallelo è lineare. L'equazione

$$\frac{dX}{dt} = -\dot{\gamma}^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

è lineare e omogenea, e quindi le soluzioni formano uno spazio vettoriale. Consideriamo quindi due vettori $v, w \in T_p M$, e li estendiamo a due campi paralleli $X_v(t)$ e $X_w(t)$, e quindi il campo $X_{v+w}(t)$ non sarà che la somma dei due. Infine, il trasporto parallelo è un isomorfismo in quanto

$$\Gamma_{t_0}^{t_1}(\gamma) \circ \Gamma_{t_1}^{t_0} = id.$$

$\square$

Vogliamo usare la connessione per derivare non solo campi vettoriali, ma anche campi tensoriali. Quello che vogliamo fare è riutilizzare l'idea che abbiamo già visto per la derivata di Lie.

Definizione 4.21

Sia (M, ∇) e consideriamo $p \in M$, $v \in T_p M$ e $T \in \Gamma \mathcal{T}_k^h$. Definiamo $\nabla_v T \in \mathcal{T}_k^h$ come

$$\nabla_v T := \frac{d}{dt} \Gamma_t^0(\gamma)_*(T(\gamma(t)))|_{t=0},$$

dove γ è una curva qualsiasi tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

La definizione non dipende dalla scelta di γ . Inoltre tale definizione si comporta bene rispetto al prodotto tensoriale, cioè

$$\nabla_v(T \otimes U) = (\nabla_v T) \otimes U + T \otimes (\nabla_v U),$$

e commuta con le contrazioni. Inoltre ha una forma "semplice" in coordinate.

Esempio

Supponiamo che g sia un tensore metrico su una varietà M , ed è quindi un tensore di tipo $(0,2)$. Allora

$$(\nabla_v g)_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial v} - v^i g_{lk} \Gamma_{ij}^l - v^i g_{jl} \Gamma_{ik}^l.$$

Le connessioni su M in modo naturale uno spazio affine sullo spazio vettoriale delle sezioni di campi tensoriali $(1,2)$ su M , ovvero $\Gamma \mathcal{T}_k^h$.

Lemma 4.22

Data ∇ connessione e T campo tensoriale, allora posso definire una nuova connessione come

$$\nabla'_v X := \nabla_v X + T(v, X(p)),$$

con $v \in T_p M$.

Dimostrazione. L'unica cosa che dobbiamo verificare è che valga la proprietà di Leibniz:

$$\begin{aligned} \nabla'_v(fX) &= \nabla_v(fX) + T(v, f(p)X(p)) = \nabla_v(f)X(p) + f(p)\nabla_v X + f(p)T(v, X(p)) = \\ &= \nabla_v(f)X(p) + \underbrace{f(p)(\nabla_v X + T(v, X(p)))}_{f(p)\nabla'_v X} = \nabla'_v fX(p) + f(p)\nabla'_v X. \end{aligned}$$

□

Inoltre, tutte le altre connessioni si possono ottenere in questo modo al variare di T .

4.2.2 Torsione

Data una connessione ∇ , possiamo definire un campo tensoriale $(1,2)$ nel seguente modo: dato $p \in M$ e $v, w \in T_p M$, allora poniamo

$$T(p)(v, w) = \nabla_v Y - \nabla_w X - [X, Y](p) \in T_p M,$$

dove X è un'estensione di v e Y è un'estensione di w . Individualmente, $\nabla_v Y$ e $\nabla_w X$ dipendono dalle estensioni scelte, ma questa particolare combinazione è invariante se cambiamo le estensioni.

Definizione 4.23 - Torsione

Il campo tensoriale di definito prima (che dipende solo da ∇) si dice torsione di ∇ .

Proposizione 4.24

La torsione di ∇ è ben definita.

Dimostrazione. Dimostriamo che la particolare combinazione che definisce la torsione di ∇ dipende solo puntualmente dalle estensioni fatte (e quindi solo dai due vettori v e w che stiamo scegliendo). Infatti

$$\nabla_v Y - \nabla_w X = v^i \frac{\partial Y}{\partial x^i} + v^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i \frac{\partial X}{\partial x^i} - w^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k,$$

ma ora notiamo che

$$[X, Y] = v^i \frac{\partial Y}{\partial x^i} - w^i \frac{\partial X}{\partial x^i}.$$

Quindi

$$T(p)(v, w) = \nabla_v Y - \nabla_w X - [X, Y](p) = v^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k,$$

dove queste sono tutte scelte puntuali, ovvero

$$T(v, w) = \nabla_v Y - \nabla_w X - [X, Y](p) = v^i w^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i v^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

□

Notiamo che l'ultima formula non è nulla in quanto

$$\Gamma_{ij}^k \neq \Gamma_{ji}^k$$

in generale (cioè in generale i simboli di Christoffel non sono simmetrici). La dimostrazione ci dice anche che le coordinate della torsione, che ora è un campo tensoriale $T \in \mathcal{T}_1^2(M)$, sono

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Definizione 4.25 - Connessione simmetrica

Una connessione ∇ si dice simmetrica se ha torsione nulla.

La definizione di connessione simmetrica è quella che ci saremmo aspettati, in quanto se la torsione è nulla allora i simboli di Christoffel sono nulli (e viceversa).

Teorema 4.26

Consideriamo una varietà M su cui sono presenti un tensore metrico g e una connessione ∇ . I seguenti fatti sono equivalenti:

1. il trasporto parallelo

$$\Gamma_{t_0}^{t_1}(\gamma) : T_{\gamma(t_0)} M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)} M$$

è un'isometria.

2. $\nabla_v g = 0$.

3. Preso U aperto di M e $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $v \in T_p M$ (con $p \in U$), possiamo considerare la funzione data da $\langle X, Y \rangle \in C^\infty(U)$, definita come

$$\langle X, Y \rangle(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle.$$

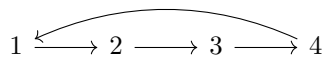
Allora vale che

$$\nabla_v \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_v X, Y \rangle + \langle X, \nabla_v Y \rangle.$$

4. Data una curva γ a valori in M e due campi su γ X, Y , come sopra posso considerare $\langle X, Y \rangle$, che stavolta è una funzione dal dominio di γ a valori in $\mathbb{R}$. Allora vale che

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \langle D_t X, Y \rangle + \langle X, D_t Y \rangle.$$

Dimostrazione. Usiamo il seguente schema di dimostrazione:



- (1) $\implies$ (2)
Deriva dalla definizione di $\nabla_v g$. Usando il trasporto parallelo (con l'ipotesi che i tangenti sono identificati in quanto abbiamo una connessione), i tangenti sono tutti isometrici.
- (2) $\implies$ (3)
Per definizione, il prodotto scalare tra X e Y è la contrazione di X e Y con il tensore g , cioè

$$\langle X, Y \rangle = c(\underbrace{X}_{(1,0)} \otimes \underbrace{Y}_{(1,0)} \otimes \underbrace{g}_{(0,2)}) = \underbrace{g_{ij} X^i Y^j}_{(2,2)}.$$

Vediamo che

$$\begin{aligned} \nabla_v \langle X, Y \rangle &= c(\nabla_v X \otimes Y \otimes g + X \otimes \nabla_v Y \otimes g + X \otimes Y \otimes \underbrace{\nabla_v g}_0) = c(\nabla_v X \otimes Y \otimes g + X \otimes \nabla_v Y \otimes g) = \\ &= \langle \nabla_v X, Y \rangle + \langle X, \nabla_v Y \rangle. \end{aligned}$$

- (3) $\implies$ (4)
Caso particolare.
- (4) $\implies$ (1)
Consideriamo una curva γ e il trasporto parallelo su γ . Consideriamo $v, w \in T_{\gamma(t_0)} M$, e le relative immagini tramite il trasporto parallelo $v', w' \in T_{\gamma(t_1)} M$. Vogliamo dimostrare che

$$\langle v, w \rangle = \langle v', w' \rangle.$$

Estendiamo v all'unico campo X parallelo su γ e w all'unico campo Y parallelo su γ . Allora

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \langle D_t X, Y \rangle + \langle X, D_t Y \rangle.$$

Ma $D_t X$ e $D_t Y$ sono entrambi nulli in quanto X e Y sono paralleli, quindi

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = 0 \implies \langle v, w \rangle = \langle v', w' \rangle.$$

□

Definizione 4.27 - Connessione compatibile

Data M varietà su cui sono presenti una connessione ∇ e un tensore metrico g , diciamo che ∇ e g sono compatibili se vale una delle condizioni del teorema precedente (e di conseguenza tutte).

4.2.3 Connessione di Levi-Civita

Facciamo un breve recap. Data una varietà M , abbiamo introdotto varie operazioni bilineari su $\mathfrak{X}(M)$:

- abbiamo visto le parentesi di Lie $[X, Y]$, operazione che è sempre possibile fare e che ha una dipendenza locale rispetto a X e Y .
- Successivamente abbiamo introdotto $\nabla_X Y$, cioè la derivata di un campo rispetto ad un altro, che dipende in maniera puntuale da X e in maniera locale da Y , ma che anche bisogno dell'esistenza di una connessione sulla varietà.
- Infine abbiamo visto che esiste anche l'operazione di torsione $T(X, Y)$, che ha bisogno anch'essa della presenza di una connessione, ma che dipende in maniera puntuale rispetto ad entrambi i campi.

Inoltre, siccome $\mathfrak{X}(M)$ è un $C^\infty(M)$ -modulo, possiamo vedere come si comportano le tre operazioni rispetto alle funzioni lisce su M : se $f, g \in C^\infty(M)$ allora

- $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$;
- $\nabla_{fX}gY = f\nabla_XgY$;
- $T(fX, gY) = fgT(X, Y)$.

Teorema 4.28 - Levi-Civita

Data (M, g) varietà pseudo-Riemanniana, allora esiste un'unica connessione simmetrica e compatibile con g .

Dimostrazione. Quello che vogliamo dimostrare è che, in carte, la connessione che stiamo cercando ha la seguente forma:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (*)$$

Vediamo per prima cosa l'unicità, ovvero che se ∇ è simmetrica e compatibile, allora in carte deve la forma (*). Dalla compatibilità con g , otteniamo

$$0 = \nabla g = (\nabla_{e_k}g)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma_{ki}^l - g_{li}\Gamma_{kj}^l.$$

In carte, possiamo scrivere

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj}\Gamma_{ki}^l + g_{li}\Gamma_{kj}^l$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g_{lk}\Gamma_{ij}^l + g_{lj}\Gamma_{ik}^l$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = g_{li}\Gamma_{jk}^l + g_{lk}\Gamma_{ji}^l.$$

Inoltre, usando la simmetria, possiamo scrivere Γ_{ij}^k o Γ_{ji}^k , per cui

$$\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = 2\Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

Moltiplicando per la matrice inversa g^{km} , otteniamo

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Per quanto riguarda l'esistenza, usiamo la formula (*) per definire i simboli di Christoffel, e otteniamo una connessione simmetrica e compatibile. La simmetria è chiara, dal fatto che permutando gli indici riotteniamo lo stesso risultato.

Per la compatibilità, si fa un ragionamento a ritroso rispetto a quello fatto per dimostrare l'unicità: prima stavamo partendo dalla compatibilità per cercare di dimostrare l'unicità e quindi trovare una formula per i simboli di Christoffel, mentre ora che abbiamo una formula mettiamo insieme i conti per vedere che effettivamente

$$\nabla g = 0.$$

□

Definizione 4.29 - Connessione di Levi-Civita

La connessione (che sappiamo essere unica) data dal Teorema di Levi-Civita si chiama Connessione di Levi-Civita.

La connessione di Levi-Civita è **naturale**: in generale, se abbiamo un diffeomorfismo tra due varietà (M, ∇) e (N, ∇') (che chiamiamo ψ), allora possiamo portare la connessione di M su N in questo modo

$$(\psi_* \nabla)_v X := \nabla_{d\psi_p^{-1}(v)}(\psi^* X),$$

con $v \in T_p N$ e $X \in \mathfrak{X}(U_p)$. Con la connessione di Levi-Civita, data un'isometria φ tra (M, g) e (N, h) , allora il seguente diagramma "commuta"

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\quad} & h = \varphi_* g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nabla_M & \xrightarrow{\quad} & \nabla_N = \nabla_{\varphi_* g} \end{array}$$

Cioè considerare la connessione di Levi-Civita in partenza e portarla avanti con l'isometria è come fare prima l'isometria e poi considerare la connessione di Levi-Civita relativa.

Esempio

Sullo spazio $\mathbb{R}^{p,q}$, i simboli di Christoffel sono tutti nulli (il tensore metrico è costante). Quindi la connessione di Levi-Civita è la derivata direzionale classica.

Data (M, g) varietà e N sottovarietà pseudo-Riemanniana, abbiamo un tensore metrico $g|_N$ indotto su N . Quindi, indicando con ∇^M la connessione di Levi-Civita su M , allora abbiamo due possibili connessioni su N , date dalla restrizione di ∇^M e dalla connessione ∇^N (connessione di Levi-Civita di $g|_N$).

Proposizione 4.30

Dato $p \in N$, $v \in T_p N$ e $X \in \mathfrak{X}(U_p)$ (con U_p aperto di N) e supponiamo di poterlo estendere ad un campo $X \in \mathfrak{X}(V_p)$ (con V_p aperto di M). Indicando con π la proiezione di $T_p M$ su $T_p N$, allora vale che

$$\nabla_v^N X = \pi(\nabla_v^M X).$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere

$$T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp,$$

per cui il prodotto scalare g si divide come un prodotto scalare g_1 su $T_p N$ e g_2 su $T_p N^\perp$, ovvero

$$g(p) = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}.$$

In p (e sottolineiamo il fatto che possiamo farlo puntualmente) possiamo scegliere una base ortonormale, per cui g è diagonale. Quando i, j e k sono tra 1 e n (dove n è la dimensione di N), allora posso reinterpretare i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k come i simboli di ∇^M o di ∇^N (e non è detto a priori che vengano uguali). Cioè

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

dove però stiamo sommando solo su k che va da 1 a n . Ma ora si nota che i simboli di ∇^N sono dati dalla restrizione di g a $T_p N$, quindi sono gli stessi della restrizione di ∇^M su $T_p N$. Cioè

$$\nabla_v^M X = \nabla_v^N X + \sum_{k=n+1}^m v^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

□

Vediamo alcuni corollari di questa proposizione:

- Se $N \subset M$, con M varietà Riemanniana, e $\gamma : I \rightarrow N$ curve, X campo su γ , allora

$$D_t^N X = \pi(D_t^M X).$$

- X è parallelo se e solo se $D_t^M X$ è parallelo a N .
- $N \subset \mathbb{R}^{p,q}$ sottovarietà pseudo-Riemanniana, allora

$$\nabla_v^N X = \pi\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right).$$

- $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ e X campo su γ in N . Allora X è parallelo se e solo se X' è ortogonale a N .

4.3 Geodetiche

Consideriamo una varietà M su cui è presente una connessione ∇ .

Definizione 4.31 - Geodetica

Una curva $\gamma : I \rightarrow M$ si dice geodetica se $\gamma' : I \rightarrow TM$ è parallelo lungo γ .

Proposizione 4.32

Per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_p M$, esiste un'unica geodetica massimale $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Dimostrazione. In carte, un campo è parallelo se e solo se

$$0 = D_t X = \frac{dX}{dt} + \dot{\gamma}^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k,$$

cioè γ è una geodetica se e solo se in carte soddisfa che

$$\ddot{\gamma}^k + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

La tesi quindi diventa che esiste un'unica curva $\gamma(t)$ (con dominio massimale) soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^k + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \\ \gamma(0) = p \\ \dot{\gamma}(0) = v \end{cases}.$$

Allora la tesi segue dal Teorema di Cauchy-Lipschitz, considerando la soluzione definita sul dominio massimale (che in generale, come vedremo, sarà diverso da tutto $\mathbb{R}$). $\square$

Siccome in fisica una curva viene indicata più come $x(t)$ che come $\gamma(t)$, allora useremo indifferentemente le due notazioni per indicare le curve, e l'equazione fondamentale delle geodetiche potrà essere espressa come

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Osservazione

Considerando $N \subset \mathbb{R}^{p,q}$ sottovarietà pseudo-riemanniana, una curva γ su N è una geodetica se e solo se γ' è ortogonale a N .

Osservazione

La parametrizzazione è importante per le geodetiche: $\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$. Infatti

$$\nabla_{cv}(cX) = c^2 \nabla_v X,$$

quindi

$$\nabla_v X = 0 \iff \nabla_{cv}(cX) = 0.$$

Vediamo qualche esempio di geodetiche: partiamo con il considerare la varietà pseudo-Riemanniana $\mathbb{R}^{p,q}$. In questo caso, il tensore metrico è costante, dunque i simboli di Christoffel sono tutti nulli. Dall'equazione per le geodetiche, ricaviamo che

$$\ddot{\gamma} = 0,$$

da cui ricaviamo

$$\gamma(t) = p + tv = \gamma_v(t).$$

Un altro esempio è $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Abbiamo già visto che in questo caso le geodetiche sono le curve per cui γ' è ortogonale alla varietà: dato $p \in \mathbb{S}^n$, abbiamo che $T_p \mathbb{S}^n = p^\perp$. Considerando $v \in T_p \mathbb{S}^n$ (che possiamo supporre unitario), la geodetica massimale passante per p con derivata prima v è data da

$$\gamma_v(t) = \cos(t)p + \sin(t)v.$$

Consideriamo l'iperboloide I^n , e le funzioni

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Esse hanno le seguenti proprietà:

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1, \quad \cosh' = \sinh \quad \text{e} \quad \sinh' = \cosh.$$

Vediamo il caso dell'iperboloide: esso è definito come il luogo dei punti di $\mathbb{R}^{n,1}$ di norma -1 ; cioè, se consideriamo il tensore metrico costante $\eta_{n,1}$, che possiamo rappresentare in coordinate rispetto alla base canonica come

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1},$$

allora

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1\} \cap \{x_1 > 0\}$$

(dobbiamo intersecare con il semispazio $\{x_1 > 0\}$ per ottenere una varietà connessa, sennò avrebbe due componenti connesse). Ragionando come prima, in questo caso, fissato $p \in I^n$, la geodetica massimale passante per p e con derivata prima $v \in p^\perp$ è data da

$$\gamma_v(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v.$$

Siccome l'iperboloide è un modello conforme dello spazio iperbolico, possiamo usare le isometrie che abbiamo già visto per studiare le geodetiche negli altri modelli: in particolare, guardando il modello del disco di Poincaré, otteniamo

Inserire disegno

Proposizione 4.33

Data (M, g) varietà pseudo-Riemanniana e $\gamma : I \longrightarrow M$ geodetica, allora $\|\dot{\gamma}\|$ è costante, e vale che se in un punto γ è di tipo spazio/tempo/luce, allora per tutti i tempi γ è di tipo spazio/tempo/luce.

Dimostrazione. Prendiamo X campo parallelo, allora $X(t_0) = 0 \iff X(t) = 0 \forall t \in I$, quindi se $\dot{\gamma}(t_0) = 0 \implies \dot{\gamma}(t) = 0 \forall t$. Possiamo considerare il caso in cui $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, e perciò

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

□

Consideriamo il caso di $\mathbb{H}^2$ con il modello del semipiano, cioè $\{y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ con tensore metrico $g = \frac{1}{y^2}g^E$. Vogliamo ricavare le geodetiche, e partiamo con il calcolare i simboli di Christoffel; rispetto alla base canonica, possiamo scrivere

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando la formula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

calcoliamo che

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y},$$

mentre gli altri sono tutti nulli. Se scriviamo una curva come $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, l'equazione delle geodetiche diventa un sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x}\dot{y}\Gamma_{12}^1 = 0 \\ \ddot{y} + \dot{x}^2\Gamma_{11}^2 + \dot{y}^2\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x}\dot{y}\frac{1}{y} = 0 \\ \ddot{y} + \dot{x}^2\frac{1}{y} - \dot{y}^2\frac{1}{y} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} \\ \ddot{y} = \frac{1}{y}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) \end{cases}.$$

Ci sono due tipi di soluzioni a questo sistema di equazioni differenziali:

- x costante in t , cioè $x(t) = c$, da cui si ricava che $y = e^{dt}$, con $c, d \in \mathbb{R}$ costanti. In particolare,

$$\gamma(t) = (c, e^{dt}) \quad \dot{\gamma}(t) = (0, de^{dt}) \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{de^{dt}}{e^{dt}} = d$$

(e in particolare torna che siano curve parametrizzate a velocità costante, come dimostrato nella proposizione precedente). Queste soluzioni corrispondono a rette verticali.

- Il secondo tipo di soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x = \lambda \tanh(dt) + c \\ y = \lambda \frac{1}{\cosh(dt)} \end{cases},$$

dove $d, \lambda \in \mathbb{R}^+$ sono costanti positive. Il supporto in questo caso è un arco di semicirconferenza, con centro sull'asse delle ascisse, ovvero

$$(x - c)^2 + y^2 = \lambda^2.$$

4.3.1 Flusso geodetico

Sia M una varietà pseudo-Riemanniana con una connessione ∇ . Consideriamo $\gamma : I \rightarrow M$ una geodetica, e il relativo campo dato $\dot{\gamma} : I \rightarrow TM$. Possiamo quindi considerare il vettore

$$\ddot{\gamma}(t) \in T_{\dot{\gamma}(t)}TM.$$

Sfruttando la connessione presente su M , possiamo definire un campo vettoriale X come segue: per ogni $v \in TM$, sia $\gamma_v : I \rightarrow M$ l'unica geodetica massimale con $\dot{\gamma}(0) = v$, e definiamo

$$X(v) = \ddot{\gamma}_v(0).$$

Questo campo vettoriale X è liscio in quanto la geodetica γ_v è la soluzione (unica) di un dato sistema di equazioni differenziale, e dipende quindi in maniera liscia dai dati iniziali. Per costruzione, le sue curve integrali (massimali) sono tutti i sollevamenti delle geodetiche massimali di M .

X genera un flusso Φ su TM .

Definizione 4.34 - Flusso geodetico

Chiamiamo flusso geodetico il flusso Φ .

4.3.2 Mappa esponenziale

Consideriamo M varietà, e la vediamo come zero-sezione del suo fibrato tangente, e prendiamo un aperto di TM che contiene M . In particolare, prendiamo V come l'insieme

$$V = \{v \in TM : 1 \in I_v\},$$

dove indichiamo con $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ la geodetica massimale tale che $\dot{\gamma}(0) = v$.

Definizione 4.35 - Mappa esponenziale

Definiamo la mappa esponenziale come

$$\exp : V \rightarrow M \quad v \mapsto \gamma_v(1).$$

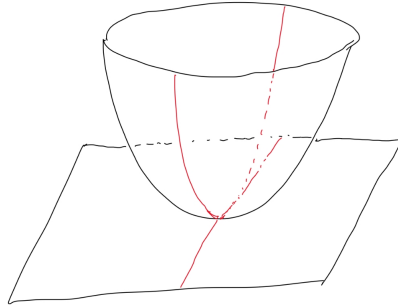
La mappa è liscia sempre per la dipendenza dai dati iniziali delle geodetiche. Inoltre, indichiamo con $V_p = V \cap T_p M$, e quindi abbiamo

$$\exp_p : V_p \rightarrow M.$$

Osservazione

La mappa esponenziale manda rette vettoriali in geodetiche:

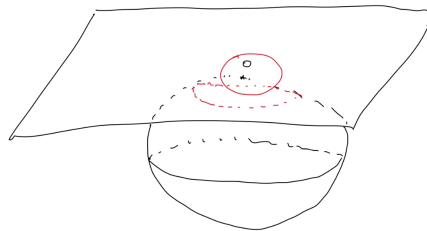
$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$



Per la sfera, ad esempio, se v ha norma 1 allora

$$\exp_p(v) = \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}.$$

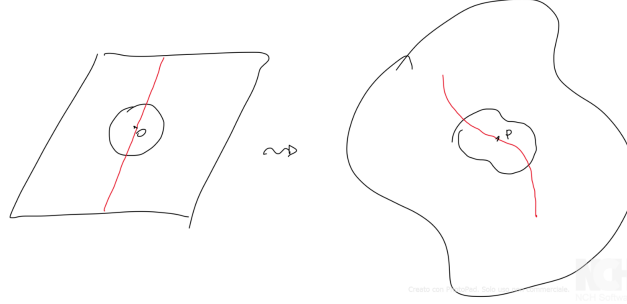
Un fatto abbastanza importante della mappa esponenziale è che il suo differenziale va da $T_p M$ in sé stesso, e per costruzione è l'identità nell'origine. Questo ci dice che $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale.



Possiamo quindi usare la mappa esponenziale per parametrizzare la varietà, e quindi il tangente $T_p M$ approssima in un qualche modo la varietà (che è l'idea intuitiva di spazio tangente). Fissiamo quindi una base ortonormale di $T_p M$, e lo identifichiamo quindi con $\mathbb{R}^{p,q}$. Con queste identificazioni,

$$U \xrightarrow{\sim} \exp_p(U)$$

e abbiamo quindi delle coordinate, che vengono dette coordinate normali.



Proposizione 4.36

Parametrizzando la varietà con coordinate normali, allora

$$g_{ij} = \eta_{ij} \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0.$$

Dimostrazione. Riprendiamo l'equazione delle geodetiche

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0,$$

e notiamo che con le coordinate normali le rette $\gamma_v(t) = tv$ sono geodetiche. Valutando l'equazione con tale curva, otteniamo che

$$v^i v^j \Gamma_{ij}^k(0) = 0 \quad \forall v \in T_p M,$$

e quindi

$$\Gamma_{ij}^k(0) = 0.$$

Per quanto riguarda il tensore metrico, le coordinate normali sono state costruite a partire da una base ortonormale per il tensore metrico, per cui g_{ij} è rappresentato proprio dalla matrice η_{ij} . Se poi utilizziamo la formula

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{li}$$

e valutiamo in zero, otteniamo anche l'ultima parte della tesi. $\square$

Definizione 4.37 - Palla geodetica

Dato $r > 0$ abbastanza piccolo per il quale la mappa esponenziale sia un diffeomorfismo, tra

$$\exp_p : B(0, r) \longrightarrow \exp_p(B(0, r)),$$

chiamiamo $\exp_p(B(0, r))$ la palla geodetica di raggio r .

Si noti che la palla geodetica è, per definizione, effettivamente diffeomorfa ad una palla.

Definizione 4.38 - Sfera geodetica

Allo stesso modo, $\forall r' < r$ possiamo definire $\exp_p(\partial B(0, r'))$ la sfera geodetica di raggio r' .

Come prima, la sfera geodetica è diffeomorfa a $\mathbb{S}^{n-1}$.

Teorema 4.39 - Lemma di Gauss

Sia $p \in M$, le geodetiche uscenti da p sono ortogonali alle sfere geodetiche.

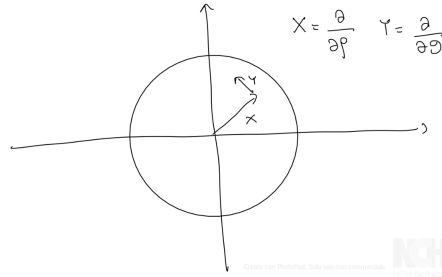
Dimostrazione. Usiamo coordinate normali, cioè ci restringiamo ad una palla per cui

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0.$$

Fissiamo quindi una sfera geodetica S , che possiamo interpretare come $\partial B(0, 1)$, e fissiamo $x \in S$. Vogliamo dimostrare che per ogni $r \in [0, 1]$, allora rx è ortogonale alla sfera geodetica di raggio r , ovvero $S = \partial B(0, r)$. Consideriamo allora

$$T_{rx}M = T_{rx}x \oplus T_{rx}S,$$

e vogliamo dimostrare che la somma è ortogonale. Fissiamo allora $y \in T_{rx}S$, e dimostriamo che $\langle x, y \rangle = 0$. Consideriamo $W = \text{Span}(x, y)$ ed estendiamo x e y a due campi X e Y , riducendoci quindi ad un problema bidimensionale.



Abbiamo quindi

$$X = \frac{\partial}{\partial \rho} \quad Y = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

X non si estende a zero, mentre Y tende a zero quando ρ tende a zero. Inoltre, questi due campi commutano, in quanto vengono fuori dalle coordinate polari (ricordiamo che è un se e solo se), cioè

$$[X, Y] = 0.$$

La nostra tesi è dimostrare che

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle_g = 0.$$

Dimostriamo che

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_X X, Y \rangle + \langle X, \nabla_X Y \rangle = 0.$$

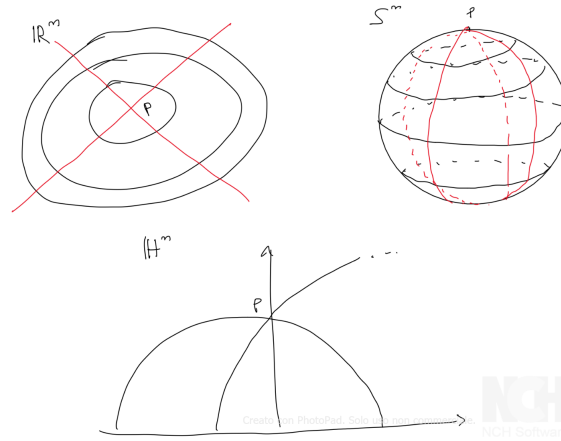
X è un campo tangente alle geodetiche, quindi $\nabla_X X = 0$, e quindi il primo termine è nullo; vediamo il secondo. Usiamo il fatto che la torsione è nulla:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \underbrace{[X, Y]}_0 = 0 \implies \nabla_X Y = \nabla_Y X,$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \langle X, Y \rangle = \langle X, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \underbrace{\langle X, X \rangle}_{\text{costante}} = 0.$$

□



Il Lemma di Gauss dice che il tensore metrico in un punto x nella palla geodetica si decompone ortogonalmente in una parte radiale, che coincide con la metrica euclidea, e una parte tangente alla sfera geodetica, che può essere più o meno arbitraria.

Definizione 4.40 - Curve minimizzanti

Data (M, g) varietà Riemanniana, diciamo che $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ è minimizzante se

$$L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Proposizione 4.41

Considerando B palla geodetica centrata in $p \in M$, sia $q \in B$. Chiamiamo γ_{pq} la geodetica che connette p a q (è unica per definizione di palla geodetica). Allora γ_{pq} è minimizzante, cioè le altre curve che realizzano la distanza tra questi due punti sono solo riparametrizzazioni.

Dimostrazione. Sia S una sfera geodetica centrata in p e che contiene q . Consideriamo γ una curva tra p e q qualsiasi, e sia $\bar{\gamma}$ una sottocurva di γ che connette p e S . La nostra tesi è dimostrare che

$$L(\bar{\gamma}) \geq L(\gamma_{pq})$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\bar{\gamma} = \gamma_{pq}$. Vediamo allora che

$$L(\bar{\gamma}) = \int \|\bar{\gamma}'(t)\|_g = \int \|\bar{\gamma}'_{\text{radiale}}(t) + \bar{\gamma}'_{\text{tangente}}(t)\|_g \geq \int \|\bar{\gamma}'_{\text{radiale}}(t)\|_g = \int \|\bar{\gamma}'_{\text{radiale}}(t)\|_E \geq L(\gamma_{pq}).$$

□

Corollario 4.42

Le palle geodetiche di raggio r (cioè l'immagine della palla di raggio r in $T_p M$) coincidono con le palle metriche di raggio r sulla superficie.

Sappiamo che la mappa esponenziale è un diffeomorfismo solo per piccoli r , quindi in generale avremo solo un contenimento

$$\exp_p(B(0, r)) \subset B(p, r)$$

quando r diventa molto grande.

Definizione 4.43 - Aperto totalmente normale

Diciamo che un aperto U di una varietà Riemanniana M si dice totalmente normale se $\forall p \in U$ esiste una palla geodetica centrata in p che contiene U .

Ad esempio, in $\mathbb{R}^n$ ogni aperto limitato è totalmente normale (in quanto il tangente in ogni punto è $\mathbb{R}^n$ stesso, e la mappa esponenziale è un diffeomorfismo non solo localmente). Per quanto riguarda S^n , ogni aperto che non contiene due punti antipodali è un aperto totalmente normale.

Lemma 4.44

Data una varietà Riemanniana M e $p \in M$, allora p è contenuto in un aperto totalmente normale.

Abbiamo inizialmente definito le geodetiche come soluzioni di particolari equazioni differenziali; possiamo però dare una caratterizzazione solo in base alla distanza tra i punti.

Definizione 4.45 - Curve localmente minimizzanti

Data una varietà Riemanniana M , diciamo che una curva $\gamma : I \rightarrow M$ è localmente minimizzante se $\forall t \in I$ esistono $t_0 < t < t_1$ tali che $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ è minimizzante.

Una curva minimizzante è localmente minimizzante, ma in generale non vale il viceversa. Essere localmente minimizzanti ed essere geodetiche sono entrambe proprietà locali per le curve, ed in realtà vale il seguente

Teorema 4.46

Data M varietà Riemanniana, $\gamma : I \rightarrow M$ curva. Allora γ è geodetica se e solo se è localmente minimizzante.

Dimostrazione. Vediamo separatamente le due implicazioni:

• $(\rightarrow)$

Supponiamo di avere γ geodetica, e per ogni t sappiamo dal Lemma precedente che esiste un intorno totalmente normale U che contiene $\gamma(t)$. Considero $t_0 < t < t_1$ in modo tale che $\gamma([t_0, t_1]) \subset U$, e dimostro che $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ è minimizzante.

Siccome U è un intorno totalmente normale, allora è contenuto in qualche palla geodetica centrata in $\gamma(t)$, e ora possiamo usare la Proposizione 4.41 per concludere che $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ è minimizzante.

• $(\leftarrow)$

Sia $t \in I$, e dal fatto che γ è localmente minimizzante sappiamo che esistono $t_0 < t < t_1$ tali che $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ è minimizzante. Sia quindi U totalmente normale che contiene $\gamma(t)$, e a meno di prendere t_0 e t_1 più vicini a t possiamo supporre che $\gamma([t_0, t_1]) \subset U$.

Ma quindi $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ è minimizzante in una palla geodetica, e per la proposizione 4.41 coincide localmente con una geodetica.

□

4.3.3 Completezza e Teorema di Hopf-Rinow

Abbiamo visto che una varietà Riemanniana M dotata di un tensore metrico g è anche uno spazio metrico, quindi ha perfettamente senso chiedersi se tale spazio sia completo o meno. In tal senso, vedremo in questa sezione che la completezza di M come spazio metrico è esprimibile in termini che riguardano solamente le geodetiche.

Definizione 4.47 - Varietà geodeticamente completa

Una varietà Riemanniana (M, g) si dice geodeticamente completa se tutte le geodetiche esistono per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esempi di varietà geodeticamente complete sono gli spazi $\mathbb{R}^{p,q}$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$.

Proposizione 4.48

Se (M, g) è una varietà Riemanniana connessa e geodeticamente completa, allora per ogni $p, q \in M$ esiste una geodetica minimizzante che li collega.

Dimostrazione. Si consideri una palla geodetica centrata in p , cioè $B(p, r)$, con bordo la sfera geodetica $S(p, r)$. Se $q \in B(p, r)$ allora abbiamo finito, in quanto sappiamo che il segmento radiale che connette p a q è la geodetica cercata. Altrimenti, si consideri p_0 tale che

$$d(p_0, q) = \min\{d(x, q) : x \in \overline{B(p, r)}\},$$

cioè uno dei punti di $B(p, r)$ che realizzano la minima distanza con q , e sia $v \in T_p M$ l'unico vettore di norma unitaria tale che

$$\gamma_v(r) = p_0.$$

Per ipotesi, la geodetica $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se poniamo $d = d(p, q)$ vogliamo dimostrare che $\gamma_v(d) = q$. Per fare ciò, consideriamo $I \subset [0, d]$ il sottoinsieme di tutti i t tali che $d(\gamma_v(t), q) = d - t$. Questo insieme è non vuoto, chiuso (è una condizione chiusa) e aperto (esercizio), e dalla connessione di $[0, d]$ esso coincide con tutto l'intervallo. $\square$

Corollario 4.49

Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente, allora

$$\exp_p(B(0, r)) = B(p, r)$$

per ogni $r > 0$.

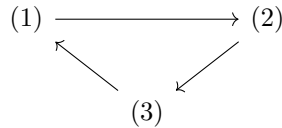
Ricordiamo che nell'uguaglianza sopra, quando M non è geodeticamente completa, allora per grandi r vale solo un'inclusione.

Teorema 4.50 - Hopf-Rinow

Data (M, g) varietà Riemanniana connessa, allora i seguenti fatti sono equivalenti:

- M è geodeticamente completa;
- $K \subset M$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato;
- M è completa (come spazio metrico).

Dimostrazione. La dimostrazione segue il seguente schema:



Vediamo separatamente le singole implicazioni:

- $(1) \implies (2)$

Sia $K \subset M$ e dimostriamo che K è chiuso e limitato allora è compatto (l'altra implicazione vale in qualsiasi spazio metrico).

Sia $p \in M$ qualsiasi, e dalla limitatezza sappiamo che esiste un certo r per cui $K \subset B(p, r)$. Quindi

$$K \subset B(p, r) \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{geodeticamente completo}} \exp_p(B(0, r)) \subset \exp_p(\overline{B(0, r)}).$$

Ora basta notare che $\overline{B(0, r)}$ è compatto, e quindi K è chiuso in un compatto, quindi compatto.

- $(2) \implies (3)$

Vera per qualsiasi spazio metrico. Consideriamo $\{x_n\}$ successione di Cauchy $\implies \overline{\{x_n\}}$ è chiuso e limitato $\implies$ è compatto per ipotesi $\implies$ ammette una sottosuccessione convergente $\implies$ una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione convergente allora è essa stessa convergente.

• (3) $\implies$ (1)

Sia M completa e γ geodetica massimale. Per assurdo, supponiamo che l'intervallo di definizione di γ sia diverso da tutto $\mathbb{R}$, cioè supponiamo che $I = (a, b)$ con $b \neq +\infty$. Prendiamo t_n successione in I convergente a b . Un'osservazione interessante è che se γ è una geodetica allora è una mappa Lipschitziana: dal fatto che $\|\gamma'\| = \text{cost}$, allora

$$d(\gamma(t_0, t_1)) \leq L(\gamma|_{[t_0, t_1]}) = \|\gamma'\| \cdot |t_0 - t_1|.$$

Quindi anche $\gamma(t_n)$ è una successione di Cauchy, e quindi per ipotesi converge ad un certo punto $p \in M$. Grazie ad un teorema di Analisi, γ è estendibile oltre b , in quanto

$$\ddot{x}^k = -\dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k$$

e la soluzione $x(t)$ converge con derivata limitata.

□

Corollario 4.51

Se M è compatta allora M è geodeticamente completa.

Dimostrazione. M compatta $\implies M$ completa (vale per ogni spazio metrico) $\implies M$ geodeticamente completa. □

Osservazione

Esistono strutture pseudo-Riemanniane che non sono geodeticamente complete.

4.3.4 Isometrie

In generale, una varietà liscia M ammette molti diffeomorfismi in sé stessa, e molti in generale possono essere costruiti dal flusso di campi vettoriali completi. Al contrario, una varietà pseudo-Riemanniana ha poche isometrie non banali (e in alcuni casi addirittura nessuna).

In questa sezione parleremo quindi di isometrie e della loro rigidità, nel senso che sono determinate dal loro comportamento al primo ordine in un punto. Classificheremo poi le isometrie degli spazi più importanti, ovvero di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$.

Teorema 4.52 - Rigidità delle isometrie

Siano $f, g : M \longrightarrow N$ due isometrie tra varietà pseudo-Riemanniane connesse. Se esiste $p \in M$ tale che $f(p) = g(p)$ e $df_p \equiv dg_p$, allora $f \equiv g$.

Dimostrazione. Prendiamo

$$U = \{q \in M : f(q) = g(q)\} \subset M.$$

U è diverso dal vuoto, in quanto p vi appartiene, e inoltre U è un chiuso di M (in quanto la condizione è chiusa). Dimostriamo allora che U è aperto.

Un vettore $v \in T_p M$ determina una geodetica γ_v con $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma'_v(0) = v$. Usiamo allora il fatto che isometrie mandano geodetiche in geodetiche: $f \circ \gamma_v$ e $g \circ \gamma_v$ sono geodetiche che coincidono al primo ordine. Quello che abbiamo quindi sono due geodetiche, $\gamma_{df_p(v)}$ e $\gamma_{dg_p(v)}$, per cui vale che $df_p(v) = dg_p(v)$, quindi sono la stessa geodetica.

Consideriamo $Z \subset V_p \subset T_p M$ tale che

$$\exp_p|_Z : Z \longrightarrow \exp_p(Z)$$

è un diffeomorfismo, e chiamiamo $V = \exp_p(Z)$. Usando quindi il fatto che $f \circ \gamma_v = g \circ \gamma_v$ per ogni $v \in Z$, allora $f|_V \equiv g|_V$. □

Vogliamo ora vedere come le isometrie ci aiutano a studiare le varietà, quindi introduciamo

Definizione 4.53 - Frame

Un frame su una varietà Riemanniana (M, g) è il dato di un punto $p \in M$ e di una base ortonormale $v_1, \dots, v_n \in T_p M$.

Corollario 4.54

Le isometrie di M , che denotiamo come $\text{Isom}(M)$, agisce in modo libero sui frame.

Dimostrazione. Se φ è un'isometria di M , allora manda

$$(p; v_1, \dots, v_n) \mapsto (\varphi(p); d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_n)),$$

e se fissa un frame allora è l'identità (per il teorema precedente). $\square$

Le varietà che ci interesseranno di più d'ora in avanti sono $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$, per cui ha senso classificare tutte le isometrie di tali spazi.

Proposizione 4.55

Vale che

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{f(x) = Ax + b \text{ con } A \in SO(n) \text{ e } b \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\text{Isom}(\mathbb{S}^n) = O(n+1)$$

$$\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = O^*(n, 1) = \{A \text{ tali che } A^T J A = J, \text{ con } J = \text{diag}(-1, \underbrace{1, \dots, 1}_n) \text{ e } a_{11} > 0\}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo il caso dello spazio iperbolico, e prendiamo il modello dell'iperboloide

$$I^n = \{\langle x, x \rangle = -1\} \cap \{x_1 > 0\}.$$

In questo caso, $A \in O(n, 1)$ preserva il prodotto scalare dato dalla matrice J , e quindi l'unica cosa a cui bisogna porre attenzione è non scambiare le due componenti connesse. Dobbiamo quindi imporre $a_{11} > 0$, e abbiamo trovato che

$$O^*(n, 1) \subset \text{Isom}(I^n).$$

Ma ora basta notare che $O^*(n, 1)$ agisce transitivamente sui frame, e quindi coincide con tutto $\text{Isom}(I^n)$ (in quanto esso agisce in maniera libera e transitiva sui frame). $\square$

4.4 Curvatura

Consideriamo una varietà Riemanniana M dotata di una connessione ∇ . Abbiamo già visto che la maniera più efficace per ottenere informazioni sulla connessione ∇ è quella di costruire campi tensoriali adeguati, come abbiamo fatto con la torsione T . Infatti, i tensori riescono a fornire informazioni precise ad ogni singolo punto $p \in M$. In questo caso, il tensore di torsione è inutile, in quanto $T = 0$ per assunzione, quindi dobbiamo provare a costruirne altri.

4.4.1 Tensore di Riemann

Ricordiamo che un campo tensoriale di tipo $(1, n)$ su una varietà M è una mappa multilineare

$$\underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_n \longrightarrow T_p M$$

che dipende in maniera liscia da p .

Definizione 4.56 - Tensore di Riemann

Il tensore di Riemann è un campo tensoriale di tipo $(1, 3)$ definito nella seguente maniera: dati $p \in M$ e u, v e w in $T_p M$, estendiamo questi tre vettori a 3 campi vettoriali X, Y e Z . Definiamo

$$R(p)(u, v, w) := \nabla_u \nabla_Y Z - \nabla_v \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y](p)} Z.$$

Possiamo anche scrivere il tensore di Riemann come

$$R(p)(u, v, w) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y](p)} Z,$$

mentre notiamo che le scritture $\nabla_Y Z$ e $\nabla_X Z$ sono essenziali, in quanto $\nabla_v Z$ e $\nabla_u Z$ sono vettori, e non ha senso derivare dei vettori. Vediamo come il tensore di Riemann sia ben definito.

Proposizione 4.57

R non dipende dalle scelte fatte (quindi dal modo in cui estendiamo i vettori u, v e w).

Dimostrazione. Partiamo da

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \left(Y^i \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} e_k + Y^i Z^j \Gamma_{ij}^k e_k \right) = \\ &= \underbrace{X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} e_k}_{(1)} + \underbrace{X^j Y^i \frac{\partial^2 Z^k}{\partial x^i \partial x^j} e_k}_{(2)} + \underbrace{X^j Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial x^i} \Gamma_{jl}^k e_k}_{(3)} + \underbrace{X^m \frac{\partial Y^i}{\partial x^m} Z^j \Gamma_{ij}^k e_k}_{(4)} + \underbrace{X^m Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^m} \Gamma_{ij}^k e_k}_{(5)} + \\ &\quad + \underbrace{X^m Y^i Z^j \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^m} e_k}_{(6)} + \underbrace{X^m Y^i Z^j \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lm}^k e_k}_{(7)}. \end{aligned}$$

Ora, calcolando $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$, vediamo che i termini (2), (3) e (5) si cancellano (per il teorema di Schwartz). Adesso, unendo i termini (1) e (4) di entrambe le espressioni, otteniamo

$$[X, Y]^i \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} e_k + [X, Y]^i Z^j \Gamma_{ij}^k e_k = \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Quindi, considerano l'espressione completa

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

vediamo che il tensore di Riemann dipende solo dai termini (6) e (7), che dipendono (in modo lineare) da u, v e w , e non dalle estensioni scelte. $\square$

Abbiamo quindi visto che il tensore di Riemann è ben definito. Per dimostrare che dipende in maniera liscia da p , ci basta lavorare in carte, e basta notare che durante la dimostrazione precedente abbiamo trovato le coordinate di R rispetto ai simboli di Christoffel e alle loro derivate.

Corollario 4.58

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m.$$

Esempio

Un primo (semplice) esempio è quello dato dalla varietà pseudo-Riemanniana $\mathbb{R}^{p,q}$, dove i simboli di Christoffel sono nulli e quindi lo è anche il tensore di Riemann.

Come la torsione, il trasporto parallelo o le geodetiche, anche il tensore di Riemann è associato in maniera naturale alla connessione ∇ da cui proviene. Infatti, un diffeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ porta la connessione ∇ presente su M ad una connessione definita su N (che chiamiamo $\varphi_* \nabla$), e manda anche il tensore di Riemann R della connessione ∇ nel tensore di Riemann R_* associato alla connessione $\varphi_* \nabla$.

Come tutti i campi tensoriali, il tensore di Riemann induce una mappa $C^\infty(M)$ –multilineare

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

che può essere riscritto come

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

A volte ci converrà pensare al tensore di Riemann come un campo tensoriale di tipo $(0, 4)$ dato da

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^m g_{lm},$$

e analogamente possiamo tornare indietro ad un tensore di tipo $(1, 3)$ tramite g^{lm} .

Ricordiamo che la mappa esponenziale fornisce una parametrizzazione della varietà (le coordinate normali) che è più utile rispetto alle altre, ovvero per cui

$$g_{ij}(0) = \eta_{ij} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0 \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0.$$

Scrivendo il tensore di Riemann rispetto a queste coordinate, otteniamo che

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j}.$$

Volendo, possiamo ricavare la formula per il tensore di Riemann di tipo $(0, 4)$ direttamente dal tensore metrico presente su M nel seguente modo

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right).$$

Abbiamo quindi scritto il tensore di Riemann in funzione dei simboli di Christoffel e del tensore metrico; vale anche un risultato inverso, cioè riusciamo a scrivere il tensore metrico in funzione del tensore di Riemann come segue (in coordinate normali)

$$g_{ij}(x) = \eta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ijkl}(0) x^k x^l + o(\|x\|^2).$$

Notiamo allora che in coordinate normali (che abbiamo detto essere le "migliori" possibili) riusciamo a scrivere il tensore metrico in modo che nel punto le derivate prime siano nulle e la variazione al secondo ordine sia descritta completamente dal tensore di Riemann.

Quanto detto fino ad ora vale nel sistema di coordinate normali; vediamo ora dei risultati, che sono relativi alle simmetrie del tensore, che valgono in ogni coordinate.

Proposizione 4.59

Valgono le seguenti simmetrie

- $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij};$
- $R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l = 0.$

A priori, lo spazio dei tensori di tipo $(1, 3)$ su uno spazio vettoriale formano uno spazio vettoriale di dimensione n^4 (con n la dimensione dello spazio vettoriale); se però ci restringiamo ai tensori che soddisfano le simmetrie appena descritte, allora vediamo che questi formano un sottospazio di dimensione

$$\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1).$$

Vediamo un po' di esempio con n piccolo (e lavoriamo con il tensore di Riemann come tensore di tipo $(0, 4)$):

- $n = 2$; allora la dimensione dei tensori $(0,4)$ che soddisfano le simmetrie volute è 1, ed un tensore è totalmente determinato da R_{1212} ;
- quando $n = 3$, la dimensione sale a 6, e un tensore è completamente determinato da

$$R_{1212} \quad R_{1313} \quad R_{2323} \quad R_{1213} \quad R_{2123} \quad R_{3132}.$$

- quando $n = 4$, la dimensione sale fino a 20.

Abbiamo quindi visto che per le superfici il tensore di Riemann ha un solo grado di libertà, ed è completamente determinato dalla sua componente R_{1212} . Andiamo a calcolare il tensore di Riemann per il piano iperbolico $\mathbb{H}^2$ (con il modello del semipiano):

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \quad g = \frac{1}{y^2} g^E,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

da cui

$$\begin{aligned} R_{1212} &= R_{121}^l g_{l2} = R_{121}^2 \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial y} + \Gamma_{1m}^2 \Gamma_{21}^m - \Gamma_{2m}^1 \Gamma_{11}^m \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left(0 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{y^4}. \end{aligned}$$

In particolare, il tensore di Riemann non è nullo.

Definizione 4.60 - Varietà piatta

(M, g) varietà Riemanniana si dice piatta se $R \equiv 0$.

Definizione 4.61 - Varietà euclidee/sferiche/iperboliche

Una varietà Riemanniana (M, g) si dice euclidea/sferica/iperbolica se è localmente isometrica a $\mathbb{R}^n/\mathbb{S}^n/\mathbb{H}^n$.

Esempio

Consideriamo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ (qui $\mathbb{X}$ può essere uno tra $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$ o $\mathbb{S}$) che agisce su $\mathbb{X}^n$ in modo libero e propriamente discontinuo, per cui abbiamo una mappa di rivestimento

$$\mathbb{X}^n \longrightarrow M := \mathbb{X}^n / \Gamma.$$

Poiché l'azione avviene tramite isometrie, allora M eredita una struttura Riemanniana (Γ preserva il tensore metrico). Alcuni esempi sono

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \quad \text{il toro,}$$

$$\mathbb{P}^n \mathbb{R} = \mathbb{S}^n / \langle \iota \rangle \quad \text{il proiettivo reale.}$$

Ci sono esempi anche di varietà iperboliche (molte di più di quelle euclidee o sferiche).

Abbiamo visto che, in un certo senso, il tensore di Riemann misura quanto il tensore metrico g presente su una varietà Riemanniana si discosti dal tensore metrico euclideo. Vediamo che il tensore di Riemann riesce a descrivere questa differenza in maniera completa, ovvero

Teorema 4.62

(M, g) varietà Riemanniana, allora M è euclidea se e solo se è piatta.

Dimostrazione. Vediamo separatamente le due implicazioni:

- $(\longrightarrow)$
 M è euclidea $\implies \forall p \in M$ esiste un intorno aperto U_p isometrico a $\mathbb{R}^n$ contenente p , ovvero il tensore metrico è quello euclideo. Allora ha il tensore di Riemann nullo.

- ($\leftarrow$)

Fissiamo delle coordinate normali. Consideriamo quindi un cubo aperto

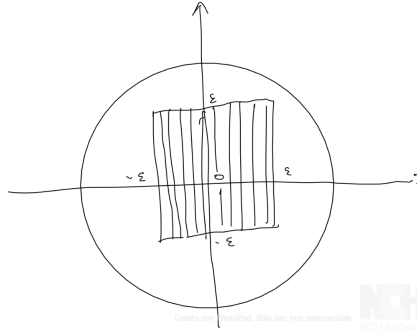
$$(-\varepsilon, \varepsilon)^n \subset B(0, r)$$

e consideriamo la base canonica nell'origine $e_1, \dots, e_n \in T_0 \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Estendiamo tali vettori a dei campi $X_1, \dots, X_n$ induttivamente tramite trasporto parallelo. Chiamiamo

$$S_i = (-\varepsilon, \varepsilon)^n \cap \{x_{i+1} = \dots = x_n = 0\},$$

e usiamo il trasporto parallelo per estendere la base prima lungo l'asse x_1 , poi lungo l'asse x_2 e così via. All' i -esimo passo, stiamo definendo il frame su S_i . Questa estensione è liscia in quanto il trasporto parallelo dipende in maniera liscia dai dati iniziali. Abbiamo quindi costruito un frame $X_1, \dots, X_n$ che è una base ortonormale per ogni punto del cubo, e tale che

$$X_i(0) = e_i \in T_0 \mathbb{R}^n.$$



Vogliamo dimostrare che i campi che abbiamo appena creato commutano, per poi utilizzare la proposizione sul raddrizzamento simultaneo di campi, e ottenere l'isometria cercata. Dimostriamo quindi che

$$\nabla_{e_i} X_k = 0 \quad \forall k$$

su S_i . Per dimostrarlo, cerchiamo di provare che

$$\nabla_{e_j} X_k = 0 \quad \text{su } S_i \quad \forall k \forall j \leq i.$$

Lo dimostriamo per induzione su i , dove il caso $i = 1$ è banale; possiamo quindi supporre che la tesi valga per i e dimostriamola per $i + 1$. Sappiamo già che, per ipotesi induttiva,

$$\nabla_{e_j} X_k = 0$$

su tutto l'iperpiano S_i . Ci basta quindi controllare che

$$\nabla_{e_{i+1}} (\nabla_{X_j} X_k) = 0$$

su S_{i+1} . Le coordinate $e_1, \dots, e_n$ commutano tra loro, e quindi dall'ipotesi che M sia piatta otteniamo che

$$\begin{aligned} 0 &= R(e_{i+1}, e_j, e_k) = \nabla_{e_{i+1}} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{e_j} \nabla_{X_{i+1}} X_k - \nabla_{[e_{i+1}, e_j]} X_k = \\ &= \nabla_{e_{i+1}} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{e_j} \nabla_{X_{i+1}} X_k = 0 \implies \nabla_{e_{i+1}} (\nabla_{X_j} X_k) = \nabla_{e_j} (\nabla_{X_{i+1}} X_k) = \nabla_{e_j} (0) = 0. \end{aligned}$$

In particolare, quando $i = n$ questo ci porta a

$$\nabla_{e_j} X_k = 0 \quad \forall j \forall k$$

su tutto il cubo. Dalla simmetria di ∇ vediamo che

$$[X_i, X_j] = \nabla_{e_i} X_j - \nabla_{e_j} X_i = 0 - 0 = 0.$$

Per la proposizione sul raddrizzamento dei campi, otteniamo una carta

$$\varphi : (U, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g^E) \quad X_i \longmapsto \frac{\partial}{\partial x^i};$$

in particolare, φ è un'isometria.

□

4.4.2 Olonomia

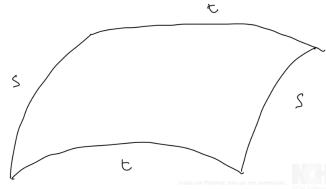
Consideriamo una varietà Riemanniana (M, ∇) e un punto $p \in M$.

Osservazione

Per ogni due vettori $v, w \in T_p M$ esistono due campi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ che estendono v e w e commutano. Infatti, in carte basta prenderli costanti.

Quindi, fissati due vettori v e w , possiamo considerare X e Y campi che estendono v e w e commutano. Chiamiamo Φ e Ψ i flussi di X e Y , che esistono per tempi piccoli. Siano quindi $s, t > 0$ abbastanza piccoli (in modo che i flussi siano definiti), e costruiamo una mappa da $T_p M$ in sé stesso nel seguente modo:

- costruiamo una curva, scivolando per s secondi su Φ , poi per t secondi su Ψ , e tornando indietro per s secondi su Φ e per t secondi su Ψ ;



- uso la connessione, cioè il trasporto parallelo, sulla curva che abbiamo creato.

Definizione 4.63 - Mappa di olonomia

La mappa di olonomia è la mappa

$$h_{s,t}^{X,Y} : T_p M \longrightarrow T_p M$$

definita sopra.

La mappa di olonomia misura "quanto cambia" un vettore quando lo trasportiamo parallelamente su un quadrato abbastanza piccolo. Possiamo mettere in relazione la mappa di olonomia con il tensore di Riemann con il seguente

Teorema 4.64

Vale che

$$h_{s,t}^{v,w}(z) = z - R(p)(v, w, z) + o(s^2 + t^2).$$

4.4.3 Derivata covariante di un campo tensoriale

Consideriamo (M, ∇) varietà Riemanniana con $T \in \mathcal{T}_k^h(M)$ campo tensoriale. Possiamo definire ∇T come un campo tensoriale di tipo $(h, k+1)$ nel seguente modo: dati $p \in M$ e $v \in T_p M$, sappiamo fare $\nabla_v T$ (campo tensoriale di tipo (h, k)). "Liberando" lo slot relativo a v , allora otteniamo un tensore di tipo $(h, k+1)$.

In coordinate, quello che stiamo facendo è

$$(\nabla_v T)_{jk}^i = v^l \nabla_l T_{jk}^i.$$

Vediamo alcuni esempi:

- se $f \in C^\infty(M)$, f è un tensore di tipo $(0, 1)$, quindi $\nabla f = df$;
- se $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora $\nabla X \in \Gamma \mathcal{T}_1^1(M)$. Possiamo quindi definire la divergenza di un campo vettoriale come $tr(\nabla X) \in C^\infty(M)$;
- $\nabla g = 0$ se ∇ è compatibile;
- ∇R è un campo tensoriale di tipo $(1, 4)$.

Definizione 4.65 - Varietà simmetrica

Diciamo che (M, g) varietà Riemanniana è simmetrica se $\nabla R \equiv 0$.

Abbiamo già visto qualche simmetria per quello che riguarda il tensore di Riemann, vediamo allora che simmetrie ci sono per ∇R .

Teorema 4.66 - Identità di Bianchi

$$\nabla_a R_{ijk}^l + \nabla_i R_{ajk}^l + \nabla_j R_{iak}^l = 0.$$

Dimostrazione. Usiamo coordinate normali: $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ puntualmente, in quanto i simboli di Christoffel sono nulli nell'origine. Allora

$$\begin{aligned} \nabla_a R_{ijk}^l &= \frac{\partial}{\partial x^a} R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial^2 \Gamma_{jk}^l}{\partial x^a \partial x^i} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^l}{\partial x^a \partial x^j}. \end{aligned}$$

Ciclando gli indici e sommando otteniamo la tesi. $\square$

4.4.4 Curvatura sezionale

Abbiamo visto come il tensore di Riemann, in opportune coordinate, determini la variazione al secondo ordine del tensore metrico g di una varietà Riemanniana M . Successivamente, tramite l'olonomia, abbiamo visto che il tensore di Riemann è anche legato al trasporto parallelo di un vettore su un piccolo quadrilatero. Vediamo ora un'interpretazione geometrica, dove sostituiamo questi piccoli quadrilateri con piccole superfici; o meglio, con dei piani contenuti in $T_p M$.

Definizione 4.67 - Curvatura sezionale

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana e sia R il tensore di Riemann (supponiamo della forma $(0, 4)$). Sia $p \in M$ e $\sigma \subset T_p M$ un piano tangente non degenere (ovvero $g|_\sigma$ è non degenere). Chiamiamo curvatura sezionale di σ la quantità

$$K(\sigma) = \frac{R(p)(u, v, v, u)}{Q(u, v)},$$

dove u e v formano una base per σ e $Q(u, v) = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2$.

Si noti che, siccome stiamo richiedendo che σ sia non degenere, allora $Q(u, v) \neq 0$. Inoltre, nel caso in cui $g|_\sigma$ sia definito positivo, allora $K(\sigma)$ rappresenta l'area del parallelogramma di lati u e v .

Proposizione 4.68

La curvatura sezionale è ben definita.

Dimostrazione. Notiamo che $K(\sigma)$ è invariante per le trasformazioni

$$(u, v) \mapsto (v, u) \quad (u, v) \mapsto (\lambda u, v) \quad (u, v) \mapsto (u, v + \lambda u).$$

Si conclude in quanto possiamo ottenere qualsiasi altra base di σ a partire da (u, v) applicando queste trasformazioni. $\square$

Chiaramente dalla definizione, il tensore di Riemann R determina la curvatura sezionale K . In un certo senso, vale anche l'implicazione opposta: se si conosce la curvatura sezionale di tutti i piani non degeneri $\sigma \subset T_p M$, allora si può determinare anche $R(p)$. Perciò non si perdono informazioni lavorando con la curvatura sezionale al posto del tensore di Riemann.

Esempio

Nel caso di superfici (quando $n = 2$), allora esiste un unico piano tangente, e quindi la curvatura sezionale può essere intesa come

$$K : M \longrightarrow \mathbb{R},$$

cioè la curvatura Gaussiana. Guardiamo il caso del piano iperbolico $\mathbb{H}^2$, e sappiamo che

$$R_{1212} = \frac{1}{y^4} \quad \text{e} \quad R_{1221} = -\frac{1}{y^4}.$$

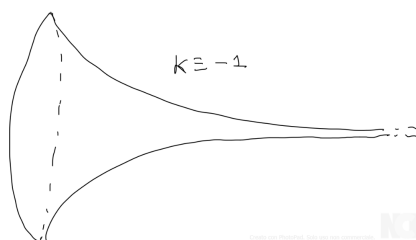
Identificando canonicamente ogni piano tangente come $\mathbb{R}^2$, possiamo scegliere la base canonica nel calcolo della curvatura, e otteniamo che

$$K(p) = \frac{\frac{-1}{y^4}}{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{y^2} - 0} = -1.$$

Quindi abbiamo scoperto che il piano iperbolico ha curvatura sezionale costante e uguale a -1 .

Osservazione

Ci sono superfici con curvatura costante -1 in $\mathbb{R}^3$? Sì, ma non sono isometriche al piano iperbolico (abbiamo problemi al bordo, non sono superfici complete).



Osservazione

Se $\text{Isom}(M)$ agisce transitivamente sui frame di M , allora M ha curvatura sezionale costante.

Corollario 4.69

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ hanno curvatura sezionale costante (rispettivamente 0 , 1 e -1).

In realtà, vale il seguente

Teorema 4.70

Sia (M, g) varietà Riemanniana semplicemente connessa, completa e a curvatura costante $K \equiv 1, 0, -1$. Allora M è isometrica a $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$.

Nel caso in cui M non sia semplicemente connessa (ma sia comunque completa e a curvatura costante), allora M è isometrica a $\mathbb{X}^n/\Gamma$, dove $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ agisce in maniera libera e propriamente discontinua.

Vale comunque che se M ha curvatura costante 1, 0 o -1 (senza ipotesi sulla completezza) se e solo se M è localmente isometrica a $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$. Quindi, avere curvatura costante è una proprietà che vale la pena caratterizzare in un qualche tipo di modo.

Proposizione 4.71

M ha curvatura costante se e solo se possiamo scrivere il tensore di Riemann come

$$R(u, v, w, z) = K \cdot (\langle u, z \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle).$$

Dimostrazione. Se R è di questo tipo, allora si può verificare facilmente che $K(\sigma) = K$ per ogni piano non degenerare σ .

Al contrario, se $K(\sigma) = K$ per ogni piano non degenerare σ , allora R deve essere di questo tipo (in quanto $K(\sigma)$ determina completamente R , e ha tutte le simmetrie che ha il tensore di Riemann). $\square$

4.4.5 Tensore di Ricci e curvatura scalare

Abbiamo visto che lavorare con il tensore di Riemann è equivalente a lavorare con la curvatura sezionale, nel senso che i due oggetti portano la stessa quantità di informazione. Nonostante ciò, a volte conviene lavorare con un campo tensoriale che contiene meno informazioni, ma che allo stesso tempo è più "maneggiabile". Una prima possibilità è quella di ottenere tensori di tipo $(0, 2)$ contraendo due indici al tensore di Riemann in maniera "naturale", ovvero

$$R_{ijk}^i \quad R_{ijk}^j \quad R_{ijk}^k.$$

Dalle simmetrie del tensore di Riemann, si nota che i primi due differiscono solo per un segno, mentre il terzo è nullo, per cui esiste fondamentalmente un solo campo tensoriale di tipo $(0, 2)$ che sia interessante da studiare.

Definizione 4.72 - Tensore di Ricci

Il tensore di Ricci è un campo tensoriale di tipo $(0, 2)$ non banale ottenuto contraendo il tensore di Riemann nel seguente modo

$$R_{ij} = R_{kij}^k.$$

Si nota subito che il tensore di Ricci è simmetrico, infatti

$$R_{ij} = R_{kij}^k = R_{kijh}g^{hk} = R_{hjik}g^{hk} = R_{hji}^h = R_{ji}.$$

Si noti che, come il tensore metrico g , il tensore di Ricci è un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$; tuttavia, il tensore di Ricci può anche essere non positivo e degenerare. Considerando infatti un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ equipaggiato della metrica euclidea, allora i tensori introdotti fino ad ora diventano banali.

In coordinate normali, il tensore di Ricci misura la variazione al secondo ordine del determinante del tensore metrico g (come il tensore di Riemann misura la variazione al secondo ordine di g stesso). In particolare, vale che

$$\det(g_{ij}(x)) = \det(\eta) \left(1 - \frac{1}{3} R_{ij}(0) x^i x^j \right) + o(\|x\|^2).$$

Sia ω la forma volume determinata da g , e come fatto adesso si può vedere che il tensore di Ricci misura la variazione di ω , cioè

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{6}R_{ij}(0)x^i x^j + o(\|x\|^2)\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Vediamo in maniera più profonda il rapporto che vi è tra g e R_{ij} : sono due tensori di tipo $(0, 2)$ su $T_p M$, e per il teorema spettrale possiamo trovare una base ortonormale per g che sia anche diagonale per R_{ij} (che chiamiamo $e_1, \dots, e_n$).

Proposizione 4.73

Vale che

$$\text{Ric}(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle \sum_{j \neq i} K(\sigma(e_i, e_j)),$$

dove $\sigma(e_i, e_j)$ è il piano generato da e_i ed e_j .

Dimostrazione.

$$\sum_{j=1}^n R_{jii}^j = \sum_{j=1}^n R_{jiii} \langle e_i, e_j \rangle = \langle e_i, e_i \rangle \sum_{j=1}^n \frac{R_{jiii}}{\langle e_i, e_i \rangle \langle e_j, e_j \rangle} = \langle e_i, e_i \rangle \sum_{j \neq i} K(\sigma(e_i, e_j)).$$

□

Corollario 4.74

Se M ha curvatura sezionale costante, allora

$$\text{Ric} = K(n-1)g,$$

dove g è il tensore metrico.

Nonostante il tensore di Ricci sia un tensore di tipo $(0, 2)$, si può comunque contrarre e ottenere la curvatura scalare.

Definizione 4.75 - Curvatura scalare

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana. La curvatura scalare di M in $p \in M$ è definita come

$$R = g^{ij} R_{ij}.$$

Si noti che la presenza di un tensore metrico è necessaria: la curvatura scalare non è definita con la sola presenza di una connessione ∇ . Se scegliamo una base ortonormale, la curvatura scalare non è altro che la traccia del tensore di Ricci. Che tipo di informazioni geometriche ci può dare la curvatura scalare?

Su una varietà Riemanniana (M, g) , essa fornisce delle informazioni sulle palle geodetiche: sia $p \in M$ e consideriamo la palla geodetica $B(p, r)$ (si ricordi che tale nozione è definita solo per r sufficientemente piccoli). Il volume delle palle euclidee $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ è dato da

$$\text{Vol}(B(0, r)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n =: V_n(r),$$

dove Γ è la funzione Γ di Eulero.

Proposizione 4.76

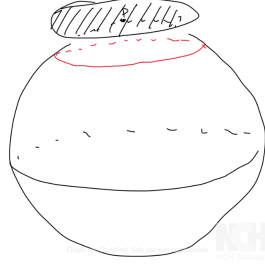
Vale che

$$\text{Vol}(B(p, r)) = V_n(r) \left(1 - \frac{1}{6(n+2)} R(p) r^2 + o(r^3)\right),$$

dove $R(p)$ è la curvatura scalare in p .

I

La curvatura scalare misura quindi la variazione al secondo ordine del rapporto tra il volume di una palla geodetica e il volume della palla euclidea. Si noti che questa è una proprietà intrinseca del punto p scelto (ovvero è indipendente dalla scelta delle coordinate). In particolare, se la curvatura è negativa (rispettivamente positiva), allora le palle geodetiche di raggio r e centrate in p hanno un volume strettamente maggiore (rispettivamente minore) del volume delle palle euclidee dello stesso raggio.



Concentriamoci sulle dimensioni 2 e 3.

Sia Σ una superficie equipaggiata con una metrica Riemanniana. Ad ogni punto $p \in \Sigma$, il piano tangente $T_p M$ ha curvatura sezionale $K(p)$, e il tensore di Riemann è completamente determinato da tale numero. Per cui le informazioni contenute nel tensore di Riemann si riducono ad un'unica funzione liscia

$$K : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R},$$

che è uguale a metà della curvatura scalare R . Otteniamo quindi che

$$R(p) = 2K(p).$$

Sia M una 3-varietà Riemanniana. Fissiamo una base ortonormale e_1, e_2 e e_3 per $T_p M$, e notiamo che le componenti R_{ijkl} del tensore di Riemann sono determinate dal tensore di Ricci: almeno due dei quattro indici i, j, k e l devono coincidere, e quindi R_{ijkl} è zero oppure uguale ad un'entrata del tensore di Ricci.

Riassumendo quello detto fino ad ora, abbiamo

Proposizione 4.77

Il tensore di Riemann è determinato dalla curvatura scalare per $n = 2$ e dal tensore di Ricci quando $n = 3$.

4.4.6 Equazione di campo di Einstein

L'equazione di campo di Einstein è l'equazione chiave della relatività generale, e descrive la curvatura dello spazio tempo in funzione della densità di materia, dell'energia e della pressione, rappresentate tramite il tensore stress-energia. L'equazione è data da

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

dove le varie grandezze sono date da

- $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci;
- R è la curvatura scalare;
- $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico;
- $T_{\mu\nu}$ è il tensore di energia-impulso;

- c è la velocità della luce e G è la costante gravitazionale.

Essa fu successivamente modificata da Einstein stesso con l'aggiunta della costante cosmologica Λ , divenendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

dove per l'appunto

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\rho_{vac},$$

dove ρ_{vac} è dell'ordine di circa 10^{-120} . L'altro "protagonista" dell'equazione è il tensore di energia-impulso, ovvero un tensore che descrive il flusso di energia e di quantità di moto associate ad un campo. Un esempio è il tensore (di energia-impulso) legato al campo elettro-magnetico in un punto privo di carica, che è definito come

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right),$$

dove $F^{\mu\nu}$ è il tensore elettromagnetico e $\eta^{\mu\nu}$ è il tensore metrico di Minkowski (tensori che abbiamo già incontrato parlando di relatività nella parte delle forme differenziali). La forma matriciale esplicita di tale tensore è data da

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

dove $\vec{S}$ è il vettore di Poynting e σ_{ij} è il tensore degli sforzi di Maxwell

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \delta_{ij}.$$

Definizione 4.78 - Tensore di Einstein

Il Tensore di Einstein è definito come

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione di campo di Einstein come

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Capitolo 5

Risoluzione di alcuni esercizi

5.1 Prima consegna

Esercizio 1.1

Mettiamoci nelle condizioni più semplici possibili, cioè consideriamo due atlanti costituiti da una carta sola; in particolare consideriamo:

$$\mathcal{A}_1 := \{id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{A}_2 := \{\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}}\}.$$

I due atlanti sono lisci (in quanto composti da una sola carta), mentre non sono compatibili in quanto la mappa di transizione non è liscia, infatti $\phi \circ id^{-1} = x^{\frac{1}{3}}$ non è neanche C^1 .

Vediamo però che le due strutture sono diffeomorfe, cioè cerchiamo una mappa $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$ che sia un diffeomorfismo. Come candidata diamo $f(x) := x^3$. Dal diagramma commutativo vediamo che

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ id \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & x^3 \\ id \downarrow & & \downarrow \phi \\ x & \xrightarrow{\quad} & x \end{array}$$

per cui la mappa indotta F corrisponde all'identità (in particolare è liscia), e quindi f risulta essere liscia. Per vedere che anche l'inversa è liscia (con $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$) basta considerare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \phi \downarrow & & \downarrow id \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & x^{\frac{1}{3}} \\ \phi \downarrow & & \downarrow id \\ x^{\frac{1}{3}} & \xrightarrow{\quad} & x^{\frac{1}{3}} \end{array}$$

e si vede $G = id$, e quindi anche g è liscia (in particolare vale che $g \circ f = id$ e $f \circ g = id$).

Esercizio 1.2

Sia $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

Dato $x \in S^n$, allora $\exists i$ tale che $x_i \neq 0$ (se non fosse così, allora $x_i = 0 \ \forall i$ e quindi $\|x\| = 0$). Detto questo, consideriamo le carte date da

$$U_i^+ := \{x \in S^n : x_i > 0\} \quad U_i^- := \{x \in S^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow \mathbb{B}^n \quad x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}),$$

dove con $\hat{x}_i$ stiamo "saltando" la i -esima coordinata. Per quanto detto prima, gli $U_i^\pm$ ricoprono S^n , e l'inversa di $\phi_i^\pm$ è data da

$$(\phi_i^\pm)^{-1} : \mathbb{B}^n \longrightarrow U_i^\pm \quad y = (y_1, \dots, y_n) \longmapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, \dots, y_n),$$

dove la scelta tra $+$ e $-$ dipende se stiamo facendo l'inversa di ϕ_i^+ o di ϕ_i^- . Per $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ consideriamo invece le carte date da

$$V_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mathbb{R} : x_i \neq 0\} \quad \psi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad x = [x_0 : \dots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \hat{x}_i, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Vediamo quindi che f letta in carte è liscia. Supponiamo di prendere un punto $y \in S^n$ con $y_i > 0$ (il caso < 0 è analogo) e chiamiamo $x = \phi_i^+(y)$. Allora abbiamo

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n \mathbb{R} \\ (\phi_i^+)^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi_i \\ \mathbb{B}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_i, \dots, x_n) & \xrightarrow{f} & [x_1 : \dots : x_{i-1} : \sqrt{1 - |x|^2} : x_i : \dots : x_n] \\ (\phi_i^+)^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi_i \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \dashrightarrow & \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \end{array}$$

In particolare la mappa tratteggiata è liscia in quanto $\|x\| < 1 \forall x \in \mathbb{B}^n$.

Esercizio 1.5

- ($\longleftarrow$) Sappiamo che ϕ è un diffeomorfismo (in particolare è un omeomorfismo) e dobbiamo dimostrare che è compatibile con l'atlante. Presa $\psi \in \mathcal{A}$ con dominio U_i , vediamo che $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(U_i \cap U)$ è composizione di diffeomorfismi, quindi è un diffeomorfismo, ed in particolare è liscia. Cioè le mappe di transizione rimangono lisce, e quindi ϕ è compatibile con l'atlante.
- ($\longrightarrow$) Sappiamo che ϕ è un omeomorfismo (continua, invertibile e con inversa continua) ed è compatibile con l'atlante; vogliamo dimostrare che è liscia. Sia $p \in U$ e consideriamo ψ carta locale per p , cioè (a meno di sostituire U_p con $U_p \cap U$ posso supporre $U_p \subset U$) $\psi : U_p \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$. Poichè V è un aperto di $\mathbb{R}^n$ che contiene $\psi(p)$, posso considerare una pallina $B_\epsilon(\psi(p)) \subset V$. Tramite una traslazione e il diffeomorfismo visto a lezione, sappiamo che tale palla è diffeomorfa ad $\mathbb{R}^n$ stesso. Quindi, chiamando $U'_p = \psi^{-1}(B_\epsilon(\psi(p)))$, ho il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U'_p & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow \psi & \uparrow \\ & & B_\epsilon(\psi(p)) \end{array}$$

Poichè ϕ è composizione di queste due mappe (che sappiamo essere lisce), allora ϕ è liscia letta nella carta ψ . Ma questo ragionamento può essere applicato ad ogni $p \in U$, e quindi ϕ è liscia.

Esercizio 2.1

Dimostriamo prima che sia di grado d , cioè che dato $z_0 \in \mathbb{C} \setminus p(S)$. L'equazione $p(z) = z_0$ si può scrivere come $p(z) - z_0 = 0$, dove ora $p(z) - z_0$ è un polinomio di grado d a coefficienti in $\mathbb{C}$, ed ammette quindi d radici contate con molteplicità. Vediamo che sono tutte distinte: se per assurdo $p(z) - z_0 = (z - z_1)^k g(z)$, con $g(z_1) \neq 0$ e $k \geq 2$, allora derivando l'espressione otterremmo

$$p'(z) = k(z - z_1)^{k-1} g(z) + (z - z_1)^k g'(z),$$

da cui, valutando in z_1 ,

$$p'(z_1) = k(z_1 - z_1)^{k-1} g(z_1) + (z_1 - z_1)^k g'(z_1) = 0$$

(ricordiamo che $k \geq 2 \rightarrow k - 1 \geq 1$). Ma allora $z_1 \in S$, e, poiché

$$p(z_1) - z_0 = 0 \rightarrow p(z_1) = z_0,$$

z_0 sarebbe immagine di un punto di S , assurdo in quanto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus p(S)$. Quindi ci sono esattamente d controimmagini distinte, e vogliamo vedere adesso che p è un rivestimento liscio; vogliamo quindi vedere che, dato z_0 come prima in $\mathbb{C} \setminus p(S)$, allora esiste un intorno U di z_0 tale che

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^d V_i,$$

dove i V_i sono a due a due disgiunti e $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ è un diffeomorfismo.

Consideriamo quindi $\{z_1, \dots, z_d\}$ l'insieme delle controimmagini di z_0 (che, da quanto dimostrato prima, sappiamo essere tutte distinte). Dato z_1 , poiché $z_1 \notin S$ allora $p'(z_1) \neq 0$, cioè p' è invertibile in z_1 ; sappiamo, dal Teorema di invertibilità locale, che esiste un intorno aperto (in $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S))$) di z_1 che è diffeomorfo (proprio tramite p , in quanto mappa liscia) ad un intorno aperto di z_0 . Se considero quindi V_1 l'intorno aperto di z_1 in partenza, posso fare lo stesso ragionamento per ogni i . A meno di restringere tali V_i , posso supporli disgiunti. In arrivo, avrò una serie di intorni aperti di z_0 , che posso quindi intersecare per avere l'intorno U desiderato (che rimane aperto in quanto intersezione finita di aperti). Tirando indietro $p^{-1}(U)$, troverò gli intorni V_i' che desideravo. Si noti che questi sono disgiunti in quanto lo erano già in V_i .

Esercizio 2.4

Dobbiamo dimostrare che f è liscia. Sia $p \in M$, ϕ carta locale per p e ψ carta locale per $f(p)$. Per ipotesi (f diffeomorfismo locale) posso scegliere U_p e $V_{f(p)}$ (e di conseguenza ϕ e ψ) tali che $f|_{U_p} : U_p \rightarrow V_{f(p)}$ sia un diffeomorfismo. Ma allora

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{f} & V_{f(p)} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

e F è liscia (in quanto f è diffeomorfismo tra U_p e $V_{f(p)}$); ma questa è proprio la definizione di mappa liscia tra varietà (in quanto possiamo applicare tale ragionamento ad ogni punto $q \in M$). Dimostriamo ora l'equivalenza tra le due definizioni:

- (1 $\rightarrow$ 2)

p rappresenta un rivestimento topologico, in quanto l'intorno ben rivestito di $x \in N$ è proprio l'intorno U dato dalle ipotesi (ed in quanto diffeomorfismo implica omeomorfismo). Ora voglio mostrare che sia un diffeomorfismo locale, cioè che $\forall x \in M$ riesco a trovare U_x e $V_{f(x)}$ intorni aperti rispettivamente di x e $p(x)$ tali che $p|_{U_x} : U_x \rightarrow V_{f(x)}$ è un diffeomorfismo. Sia quindi $y = p(x)$, per ipotesi so che esiste un intorno aperto $V_y \subset N$ per cui

$$p^{-1}(V_y) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

con $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V_y$ diffeomorfismo. Allora, siccome $x \in p^{-1}(y)$, so che $x \in U_j$ per qualche j , e scelgo proprio U_j e V_y come intorni aperti di x e $y = p(x)$.

- (2 $\rightarrow$ 1)

p è un rivestimento topologico, quindi $\forall y \in N$ esiste un intorno V_y per cui

$$p^{-1}(V_y) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

e $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V_y$ è un omeomorfismo. Ma sappiamo anche che p è un diffeomorfismo locale, quindi $p|_{U_i}$ è un omeomorfismo e un diffeomorfismo locale, e per quanto dimostrato prima è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.5

Siano M e N come nelle ipotesi e $f : M \rightarrow N$ un embedding, cioè un'immersione iniettiva che è omeomorfismo con l'immagine. Dal fatto che f sia un'immersione, in particolare, ricaviamo che $\forall p \in M$ df_p è iniettivo; però $\dim(M) = \dim(N)$, e quindi df_p è una funzione lineare iniettiva tra spazi della stessa dimensione (come visto a lezione i tangenti hanno la stessa dimensione della varietà) ed è quindi invertibile. Per il Teorema di invertibilità locale, f è un diffeomorfismo locale. Quindi sappiamo che f è un embedding, quindi in particolare un omeomorfismo con l'immagine, ed un diffeomorfismo locale: dall'esercizio precedente sappiamo che è un diffeomorfismo con l'immagine. L'unica cosa che ci manca da dimostrare è che f sia surgettiva.

Sfruttiamo le ipotesi su M e N . Dimostriamo che $\text{Imm}(f)$ è un insieme aperto e chiuso (è non vuoto) di N , e per connessione di N avremo che $\text{Imm}(f) = N$.

- $\text{Imm}(f)$ è aperto. Sia $y \in \text{Imm}(f)$, e sia $x = f^{-1}(y)$ (sappiamo essere unica in quanto f è diffeomorfismo con l'immagine); f è un diffeomorfismo locale (su tutta M), quindi esiste un intorno aperto U_x di x (in M) e un intorno aperto V_y di y (in N) per cui $f|_{U_x}$ è diffeomorfismo tra U_x e V_y , cioè $V_y \subset \text{Imm}(f)$.
- $\text{Imm}(f)$ è chiuso. M è compatta, quindi $f(M)$ è compatta; N è una varietà e quindi uno spazio di Hausdorff. I compatti negli spazi di Hausdorff sono chiusi, quindi $f(M)$, essendo compatto in N , è chiuso.

Esercizio 3.2

L'isomorfismo è dato da

$$\Psi : V \otimes V^* \rightarrow \text{End}(V) \quad (v, w^*) \mapsto \phi(z \mapsto w^*(z)v).$$

Dimostriamo i due contenimenti:

- Consideriamo l'immagine di un elemento $v \otimes w^*$. La mappa associata a tale elemento ha immagine completamente contenuta in $\text{Span}(v)$, ovvero la dimensione dell'immagine è al più 1, e quindi il rango è al più 1.
- Nel caso della mappa nulla, allora tale mappa è immagine tramite Ψ dell'elemento nullo. Sia allora f di rango 1, cioè $\dim(\text{Imm}(f)) = 1$. Prendiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ di V , dove $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è una base di $\text{Ker}(f)$ e v_n è un vettore su cui f non si annulla. Allora possiamo scrivere

$$f(v_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = v.$$

Vediamo allora che

$$f = \Psi(v \otimes v_n^*)$$

in quanto coincidono su $\mathcal{B}$. Infatti, preso v_i con $i \in \{1, \dots, n-1\}$ abbiamo che

$$(v \otimes v_n^*)(v_i) = v_n^*(v_i)v = 0,$$

mentre per v_n abbiamo

$$(v \otimes v_n^*)(v_n) = v_n^*(v_n)v = v = f(v_n).$$

Esercizio 3.3

Notiamo che, dati $v_1, \dots, v_n$, se esistono $i < j$ tali che $v_i = v_j$ allora

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = 0.$$

Infatti

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_n = \text{sgn}(\tau) v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n = -v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

dove τ è la trasposizione che scambia i e j .

Supponiamo che $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0$ e, per assurdo, che $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente dipendenti. Questo accade se e solo se esiste una combinazione lineare nulla non banale di $v_1 \dots v_n$, ed è equivalente all'esistenza di un indice i tale che

$$v_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j v_j.$$

Se andiamo a valutare il prodotto wedge otteniamo

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = v_1 \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j v_j \wedge \cdots \wedge v_n = \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_n = 0$$

in quanto ogni addendo è uguale a zero (per l'osservazione iniziale). Assurdo.

Supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente indipendenti, allora possiamo completarli a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m\}$ di V . Quindi l'insieme dato da

$$\mathcal{D} = \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m}$$

è una base di Λ^n , e in particolare $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \mathcal{D}$ ed è quindi diverso da zero (altrimenti $\mathcal{D}$ non sarebbe una base).

Esercizio 3.4

Sia $\alpha \in \Lambda^k$, e scrivo α come combinazione lineare della base data da $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$, cioè

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}.$$

Poiché $\alpha \neq 0$, allora esiste $\alpha_{i_1, \dots, i_k} \neq 0$, e considero gli indici $\{i_{k+1}, \dots, i_n\}$ tali che

$$\{i_1, \dots, i_k\} \cup \{i_{k+1}, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$$

e l'unione è disgiunta (cioè sto considerando gli $n - k$ indici che ho lasciato fuori). Ponendo $\beta = v_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}$, ho la tesi. Infatti, vale che

$$\alpha \wedge \beta = \pm \alpha_{i_1, \dots, i_k} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0.$$

Dobbiamo dimostrare che fare il prodotto wedge per β non annulla il coefficiente $\alpha_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$, mentre annulla tutti gli altri.

Per come abbiamo scelto gli indici $i_{k+1}, \dots, i_n$, ho direttamente il primo punto; infatti, nel prodotto wedge di

$$\alpha_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}$$

compaiono esattamente tutti gli indici da 1 a n .

Per quanto riguarda il secondo, sappiamo gli insiemi $\{i_1, \dots, i_k\}$ e $\{i_{k+1}, \dots, i_n\}$ costituiscono una partizione di $\{1, \dots, n\}$. Se considero quindi un altro insieme di indici di cardinalità k , cioè $\{j_1, \dots, j_k\} \neq \{i_1, \dots, i_k\}$, allora esisterà un $1 \leq h \leq k$ tale che $j_h \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, cioè $j_h \in \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$, e quindi

$$\alpha_{j_1, \dots, j_k} v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_k} \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_n} = 0.$$

Infatti, l'indice che abbiamo chiamato j_h compare due volte (una a sinistra e una a destra), e per l'osservazione fatta all'inizio dell'esercizio 3.3 ho l'uguaglianza voluta.

Dimostriamo ora il secondo punto. La mappa in questione è iniettiva, in quanto se $\alpha \neq 0$ esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ (per quanto dimostrato fino ad ora). Vediamo che vi è

un'uguaglianza dimensionale tra gli spazi di partenza e di arrivo. Sappiamo già che $\dim(\Lambda^k) = \binom{n}{k}$, vediamo l'altra.

Sappiamo che $\dim(\Lambda^n) = 1$, ed in particolare un generatore è dato dal vettore $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$. Ho quindi un isomorfismo

$$\psi : \Lambda^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \quad v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \mapsto 1$$

che induce l'isomorfismo

$$\phi : \text{Hom}(\Lambda^{n-k}, \Lambda^n) \xrightarrow{\sim} (\Lambda^{n-k})^* \quad f \mapsto f^* = \psi \circ f.$$

Λ^{n-k} è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, ed è quindi isomorfo (non canonicamente) al suo duale, cioè hanno la stessa dimensione. Perciò $\dim(\text{Hom}(\Lambda^{n-k}, \Lambda^n)) = \dim((\Lambda^{n-k})^*) = \dim(\Lambda^{n-k}) = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ e ho la tesi. Infatti la mappa (dell'esercizio) è lineare e iniettiva tra spazi della stessa dimensione, quindi un isomorfismo.

5.2 Seconda consegna

Esercizio 4.5

Si tratta di un semplice conto:

$$\begin{aligned} & [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = ([X, Y]Z - Z[X, Y]) + ([Y, Z]X - X[Y, Z]) + ([Z, X]Y - Y[Z, X]) = \\ & = ((XY - YX)Z - Z(XY - YX)) + ((YZ - ZY)X - X(YZ - ZY)) + ((ZX - XZ)Y - Y(ZX - XZ)) = \\ & = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY + ZXY - XZY - YZX + YXZ = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 4.6

Date $A = (a_i^j)$ e $B = (b_h^k)$, scriviamo i campi X_A e X_B in coordinate come

$$X_A = a_i^j x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad X_B = b_h^k x^h \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Andiamo a valutare indipendentemente $X_A(x)X_B(x)$ e $X_B(x)X_A(x)$:

$$\begin{aligned} X_A(x)X_B(x) &= X_A \left(b_h^k x^h \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = a_i^j x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(b_h^k x^h \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \\ &= a_i^j b_h^k x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(x^h \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = a_i^j b_h^k x^i \left(\frac{\partial x^h}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la regola di Leibniz. Analogamente

$$\begin{aligned} X_B(x)X_A(x) &= X_B \left(a_i^j x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = b_h^k x^h \frac{\partial}{\partial x^k} \left(a_i^j x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= b_h^k a_i^j x^h \frac{\partial}{\partial x^k} \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = b_h^k a_i^j x^h \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

Andiamo a valutare $[X_A, X_B](x)$, ricordando inoltre che $\frac{\partial x^h}{\partial x^j} = \delta_j^h$ e $\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i$:

$$\begin{aligned} [X_A, X_B](x) &= X_A(x)X_B(x) - X_B(x)X_A(x) = \\ &= a_i^j b_h^k x^i \left(\frac{\partial x^h}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) - b_h^k a_i^j x^h \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = a_i^j b_j^k x^i \frac{\partial}{\partial x^k} - b_h^k a_i^j x^h \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Adesso cambiamo gli indici simmetricamente (in modo da sommare le cose, cioè ad esempio avere ovunque $\frac{\partial}{\partial x^k}$ al posto di $\frac{\partial}{\partial x^j}$, e di conseguenza il resto degli indici) ed otteniamo

$$(a_i^j b_j^k - b_i^j a_j^k) x^i \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Concludiamo notando che $(AB)_i^k = a_j^k b_i^j = b_i^j a_j^k$ e $(BA)_i^k = b_j^k a_i^j = a_i^j b_j^k$, per cui

$$X_{BA-AB}(x) = (a_i^j b_j^k - b_i^j a_j^k) x^i \frac{\partial}{\partial x^k},$$

che è esattamente la formula che abbiamo ottenuto prima.

Esercizio 4.7

Quando scriviamo fX abbiamo un campo, dunque quando scriviamo $fX(gY)$ dobbiamo utilizzare la regola di Leibniz (cioè deriviamo gY rispetto a fX). Siccome la moltiplicazione per $f \in C^\infty(M)$ è lineare, allora fare $fX(gY)$ è la stessa cosa che fare $f[X(gY)]$. Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) = f[X(g)Y + gXY] - g[Y(f)X + fYX] = \\ &= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX, \end{aligned}$$

dove quando scriviamo $X(g)$ o $Y(f)$ intendiamo la derivata di g (rispettivamente f) rispetto al campo X (rispettivamente Y). Siccome la moltiplicazione per uno scalare $f \in C^\infty(M)$ è commutativa, allora $fgXY = gfXY$, quindi otteniamo

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= \dots = fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - fgYX = \\ &= fX(g)Y - gY(f)X + fg(XY - YX) = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]. \end{aligned}$$

Esercizio 5.1

Una distribuzione $\mathcal{D}$ di rango 1 è una scelta puntuale (rispetto a $p \in M$) di un sottospazio unidimensionale $\mathcal{D}(p)$ (quindi una retta) all'interno dello spazio tangente $T_p M$. Usiamo il teorema di Frobenius, cioè sappiamo che $\mathcal{D}$ è integrabile se e solo se è involutiva; ci basta quindi dimostrare che $\mathcal{D}$ è involutiva. Abbiamo visto a lezione che la condizione che stiamo cercando ($\mathcal{D}$ involutiva) è equivalente a richiedere che, dato un frame $X_1, \dots, X_k$ per $\mathcal{D}$, allora $[X_i, X_j]$ è tangente a $\mathcal{D} \forall i, j$. Nelle condizioni dell'esercizio, il frame è composto da un singolo campo, che chiamiamo quindi X . Ma ora la conclusione è ovvia in quanto il frame di X con sé stesso è sempre nullo, quindi tangente a $\mathcal{D}$.

Esercizio 5.3

(In questo esercizio useremo coordinate $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, mentre la nostra distribuzione sarà $\mathcal{D} = \{ax + by + cz = 0\}$; scusate ma con tutti gli indici mi si annodavano gli occhi)

Il nostro obiettivo è usare il Teorema di Frobenius, quindi ci basta dimostrare che $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se $X \cdot \text{rot}(X) = 0$. Ma sappiamo anche che $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se, dato Y e Z un frame per $\mathcal{D}$, allora $[Y, Z]$ è tangente a $\mathcal{D}$. Fissiamo $p \in \mathbb{R}^3$, e sappiamo che almeno uno tra a , b e c è diverso da zero quando valutato in p . Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $a(p) \neq 0$, e quindi in un intorno U_p di p vale che $a(p) \neq 0$. Poniamo allora

$$Y := (-b, a, 0) \quad Z := (-c, 0, a).$$

Y e Z sono campi tangenti a $\mathcal{D}$ (in quanto ortogonali al vettore normale (a, b, c)) e ne costituiscono un frame su U_p , in quanto a non si annulla. Allora vogliamo dimostrare che $[Y, Z]$ è tangente se e solo se $X \cdot \text{rot}(X) = 0$. Il campo $[Y, Z]$ è tangente alla distribuzione se e solo se è ortogonale al vettore normale (cioè (a, b, c)), quindi se e solo se $[Y, Z] \cdot X = 0$. Andiamo a scrivere esplicitamente $[Y, Z]$:

$$[Y, Z] = YZ - ZY = -b \frac{\partial}{\partial x}(-c, 0, a) + a \frac{\partial}{\partial y}(-c, 0, a) + c \frac{\partial}{\partial x}(-b, a, 0) - a \frac{\partial}{\partial z}(-b, a, 0) =$$

$$= \left(b \frac{\partial c}{\partial x} - a \frac{\partial c}{\partial y} - c \frac{\partial b}{\partial x} + a \frac{\partial b}{\partial z}, c \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial a}{\partial z}, -b \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial a}{\partial y} \right).$$

Andiamo a valutare quindi $[Y, Z] \cdot X$:

$$\begin{aligned} [Y, Z] \cdot X &= ab \frac{\partial c}{\partial x} - a^2 \frac{\partial c}{\partial y} - ac \frac{\partial b}{\partial x} + a^2 \frac{\partial b}{\partial z} + bc \frac{\partial a}{\partial x} - ab \frac{\partial a}{\partial z} - bc \frac{\partial a}{\partial x} + ac \frac{\partial a}{\partial y} = \\ &= ab \frac{\partial c}{\partial x} - a^2 \frac{\partial c}{\partial y} - ac \frac{\partial b}{\partial x} + a^2 \frac{\partial b}{\partial z} - ab \frac{\partial a}{\partial z} + ac \frac{\partial a}{\partial y} = \\ &= -a \left(a \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) + b \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \right) = -aX \cdot \text{rot}(X). \end{aligned}$$

Ricapitolando, $\mathcal{D}$ è integrabile $\iff \mathcal{D}$ è involutiva $\iff [Y, Z]$ è tangente a $\mathcal{D} \iff [Y, Z] \cdot X = 0 \iff -aX \cdot \text{rot}(X) = 0$. Ma su U_p a non si annulla mai, quindi $\iff X \cdot \text{rot}(X) = 0$.

Esercizio 5.6

Dato $p \in M$, sappiamo che esiste U_p intorno aperto di p tale che $\pi^{-1}(U_p) \cong U_p \times \mathbb{R}^k$. Consideriamo perciò la sezione "zero", cioè la sezione data da

$$s : M \longrightarrow E \quad p \longmapsto (p, 0).$$

Vediamo che, dato $p \in M$,

$$\pi \circ s(p) = \pi(p, 0) = p = id_M(p).$$

Sia ora $q \in E$. Sia $p \in M$ dato da $p = \pi(q)$, e quindi sappiamo che esiste un intorno banalizzante di p (che indichiamo con U_p); possiamo vedere q come una coppia (p, v) , dove $v \in \mathbb{R}^k$. A questo punto definiamo localmente l'omotopia tra $s \circ \pi$ e id_E come

$$H : U_p \times \mathbb{R}^k \times [0, 1] \longrightarrow U_p \times \mathbb{R}^k \quad ((p, v), t) \longmapsto (p, tv).$$

Esercizio 6.1

Vogliamo dotare $M \times N$ di un atlante che la renda una varietà con bordo. Solo per questioni di notazione, consideriamo $N \times M$ al posto di $M \times N$ (in quanto lo spazio $\mathbb{R}_+^k$ è definito come avente l'ultima coordinata ≥ 0). Siano $m = \dim(M)$ e $n = \dim(N)$ e consideriamo

$$\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow W_i \subset \mathbb{R}_+^m\}_{i \in I} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \{\psi_j : V_j \longrightarrow Z_j \subset \mathbb{R}^n\}_{j \in J}$$

atlanti rispettivamente per M e per N . Vogliamo vedere che l'atlante

$$\mathcal{C} = \{(\psi_j, \phi_i) : V_j \times U_i \longrightarrow Z_j \times W_i \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \cong \mathbb{R}_+^{m+n}\}_{(j,i) \in J \times I}$$

$$(\psi, \phi)(q, p) = (\psi(q), \phi(p)) \in Z_j \times W_i$$

rende la varietà $N \times M$ una varietà con bordo. Prima di tutto notiamo che effettivamente l'insieme $\{V_j \times U_i\}$ riveste $N \times M$, in quanto le famiglie $\{V_j\}$ e $\{U_i\}$ rivestivano N e M . Inoltre, le mappe di transizione sono lisce, in quanto

$$(\psi_1, \phi_1) \circ (\psi_2, \phi_2)^{-1} : (\psi_2, \phi_2)((V_1 \times U_1) \cap (V_2 \times U_2)) = \psi_2(V_1 \cap V_2) \times \phi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi_1(V_1 \cap V_2) \times \phi_1(U_1 \cap U_2)$$

$$(x, y) \longmapsto (\psi_1 \circ \psi_2^{-1}(x), \phi_1 \circ \phi_2^{-1}(y)).$$

Il fatto di poter lavorare "separatamente" su ϕ e ψ ci aiuta molto, in quanto le mappe risultanti sono lisce poiché le componenti lo sono (e le componenti sono lisce poiché sono carte per le singole varietà N e M). Inoltre sono chiaramente invertibili.

Ora vogliamo vedere che $\partial(N \times M) \cong N \times \partial M$. Voglio vedere che la funzione

$$\chi : \partial(N \times M) \longrightarrow N \times \partial M \quad (q, p) \longmapsto (q, p)$$

è ben definita ed è un diffeomorfismo. Partiamo dalla buona definizione: consiste nella verifica che $(q, p) \in \partial(N \times M)$ se e solo se $p \in \partial M$. Considerando l'atlante $\mathcal{C}$ costruito prima, vediamo che $(q, p) \in \partial(N \times M)$ se e solo se esiste (ψ, ϕ) carta locale per (q, p) tale che $(\psi, \phi)(q, p) \in \partial\mathbb{R}_+^{m+n} \cong \mathbb{R}^n \times \partial\mathbb{R}_+^m$. Sempre per il motivo che le carte (ψ, ϕ) "lavorano su coordinate diverse", vediamo che

$$(\psi, \phi)(q, p) = (\psi(q), \phi(p)) \in \mathbb{R}^n \times \partial\mathbb{R}_+^m \iff \phi(p) \in \partial\mathbb{R}_+^m$$

(il se e solo se vale in quanto $\psi(q) \in \mathbb{R}^n$ sempre). Ricordando che $\phi \in \mathcal{A}$, atlante per M , allora questa condizione vale $\iff p \in \partial M$, e quindi la mappa χ è ben definita. Il fatto che $(q, p) \in \partial(N \times M) \iff p \in \partial M$ ci dice inoltre che χ è una bigezione tra $\partial(N \times M)$ e $N \times \partial M$; infatti è iniettiva per definizione, ed inoltre è surgettiva poiché, fissato $(q, p) \in N \times \partial M$, allora abbiamo dimostrato che $(q, p) \in \partial(N \times M)$ (e quindi $(q, p) = \chi((q, p))$, tutto molto tautologico). Concludiamo vedendo che χ è liscia quando viene letta in carte.

Fissato un intorno $V_j \times U_i$ di (q, p) , allora abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V_j \times U_i & \xrightarrow{\chi} & V_j \times U_i \\ (\psi_j, \phi_i) \downarrow & & \uparrow (\psi_j, \phi_i)^{-1} \\ Z_j \times W_i & \xrightarrow{id} & Z_j \times W_i \end{array}$$

Esercizio 6.3

Per prima cosa, dato che f è una sommersione, mi metto in coordinate per cui f risulta essere

$$(x_1, \dots, x_{m-n}, x_{m-n+1}, \dots, x_m) \xrightarrow{\pi} (x_{m-n+1}, \dots, x_m).$$

In queste condizioni, f non si interessa delle prime $m-n$ coordinate, ed in particolare possiamo sempre spezzare cosa fa f tra le prime $m-n$ coordinate e le ultime n . Questo fatto ci aiuta molto, in quanto quando andiamo a considerare la preimmagine tramite f di qualche sottoinsieme, la possiamo vedere come il prodotto cartesiano tra $\mathbb{R}^{m-n}$ e l'insieme stesso.

Preso $p \in f^{-1}(D)$, vogliamo far vedere che esiste U_p intorno di p in M e una carta locale $\phi : U_p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ tale che $\phi(U_p \cap f^{-1}(D)) = V \cap \mathbb{R}_+^m$.

Poiché $p \in f^{-1}(D)$, allora $\exists q \in D$ tale che $q = f(p)$, e per definizione di dominio regolare esiste U_q intorno di q in N e una carta locale ψ che fa quello che vogliamo. Poniamo $U_p := f^{-1}(U_q)$, e per le speciali carte che abbiamo scelto $U_p \cong \mathbb{R}^{m-n} \times U_q$ (infatti f è una proiezione quando letta in carte). Voglio trovare quindi ϕ tale che

$$\phi : U_p \xrightarrow{\sim} V_p \subset \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad \phi_p(U_p \cap f^{-1}(D)) = V_p \cap \mathbb{R}_+^m.$$

Costruiamo ϕ così:

$$\phi : U_p \cong \mathbb{R}^{m-n} \times U_q \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n} \times \psi(U_q) \quad (x, y) \mapsto (x, \psi(y)).$$

Osserviamo che l'immagine di ϕ , cioè $V_p := \phi(\mathbb{R}^{m-n} \times U_q)$, è diffeomorfa a $\mathbb{R}^{m-n} \times V_q$.

Vediamo che ϕ soddisfa le richieste: nelle condizioni in cui siamo vale che

$$U_p \cap f^{-1}(D) \cong (\mathbb{R}^{m-n} \times U_q) \cap f^{-1}(D) = \mathbb{R}^{m-n} \times (U_q \cap f^{-1}(D)) \cong \mathbb{R}^{m-n} \times (U_q \cap D),$$

quindi

$$\begin{aligned} \phi(U_p \cap f^{-1}(D)) &\cong \phi(\mathbb{R}^{m-n} \times (U_q \cap D)) = \mathbb{R}^{m-n} \times \psi(U_q \cap D) \cong \mathbb{R}^{m-n} \times (V_q \cap \mathbb{R}_+^n) \cong \\ &\cong (\mathbb{R}^{m-n} \times V_q) \cap (\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}_+^n) = V_p \cap \mathbb{R}_+^m, \end{aligned}$$

come voluto.

Esercizio 6.4

Dimostriamo separatamente le due implicazioni. Se M è orientabile, allora la forma volume è una

n -forma mai nulla su M . Viceversa, sia ω una n -forma mai nulla, e definiamo un'orientazione su M . Per prima cosa, definiamo un'orientazione su $T_p M$ ($p \in M$): diciamo che $(v_1, \dots, v_n)$ è un'orientazione di $T_p M$ se e solo se vale

$$\omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

Questa scelta definisce effettivamente un'orientazione su $T_p M$: se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base positiva per la definizione appena data, A matrice con determinante positivo e $(w_1, \dots, w_n)$ si ottiene da $(v_1, \dots, v_n)$ come $w_i = Av_i$, allora

$$\omega(p)(w_1, \dots, w_n) = \omega(p)(Av_1, \dots, Av_n) = \det(A)\omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0$$

in quanto $\det(A) > 0$ e $\omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0$.

Vediamo ora che questa scelta definisce un'orientazione su tutta M . Per farlo, vogliamo vedere che se ϕ è una carta, $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ con U connesso, allora $d\phi$ manda tutte le basi positive in basi positive o in basi negative: detto meglio, vogliamo vedere che non possono esistere p e q in U (e l'ipotesi di connessione sarà fondamentale) tali che $d\phi_p$ manda basi positive in basi positive mentre $d\phi_q$ manda basi positive in basi negative. Per vederlo, portiamo "in avanti" $\omega|_U$ (cosa che possiamo fare in quanto ϕ è un diffeomorfismo tra U e V) e definiamo $\phi_*\omega$ come

$$\phi_*\omega(x)(v_1, \dots, v_n) := \omega(\phi^{-1}(x))(d\phi_{\phi^{-1}(x)}^{-1}(v_1), \dots, d\phi_{\phi^{-1}(x)}^{-1}(v_n)).$$

Ora, $\phi_*\omega$ risulta essere una n -forma mai nulla su V (per costruzione). Vogliamo far vedere che non possono esistere x e y in V tali che

$$\phi_*\omega(x)(e_1, \dots, e_n) > 0 \quad \text{e} \quad \phi_*\omega(y)(e_1, \dots, e_n) < 0.$$

Definiamo quindi

$$\text{sgn} : V \rightarrow \{\pm 1\} \quad x \mapsto \text{sgn}(\phi_*\omega(x)(e_1, \dots, e_n)).$$

L'applicazione è continua (in realtà liscia, in quanto le forme differenziali variano in maniera liscia rispetto ai punti in cui sono valutate) e ben definita. La buona definizione deriva dal fatto che la forma $\phi_*\omega$ è mai nulla (che deriva a sua volta dal fatto che ω stessa è mai nulla). Vorremmo porre particolarmente attenzione al fatto che i tangenti $T_x V = T_y V = \mathbb{R}^n$ sono **canonicamente identificati** (in quanto sono le derivazioni in $\mathbb{R}^n$ e vi è quindi una base canonica). Quindi la base $(e_1, \dots, e_n)$ è una scrittura che non dipende dal punto x in cui stiamo valutando la forma. Detto questo, la funzione sgn è una funzione continua da un connesso (V è immagine di U , che è connesso, tramite ϕ , che è liscia) in un insieme discreto, e quindi è costante su tutto U . Perciò il segno di $\phi_*\omega(x)(e_1, \dots, e_n)$ è sempre positivo o sempre negativo, e non può quindi cambiare.

Perciò, se prendiamo un atlante $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$, con U_i connesso $\forall i \in I$ (ad esempio con un atlante adeguato), allora sappiamo che $\forall i \in I$ ϕ_i preserva l'orientazione su tutto U_i , o la ribalta. Nel caso ϕ_i ribaltasse l'orientazione, compongo ϕ_i con una riflessione per un iperpiano.

5.3 Terza consegna

Esercizio 7.1

Notiamo prima di tutto che calcolare l'integrale su γ_i o su γ_i meno un punto è la stessa cosa, in quanto i punti hanno misura nulla. Considerando la proiezione al quoziente

$$\varphi : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \rightarrow S^1 \times S^1 \quad (\alpha, \beta) \mapsto ([\alpha], [\beta]),$$

(dove la relazione di equivalenza è data dalla somma di costanti additive del tipo $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) possiamo restringerla alla parte interna del quadrato e ottenere un diffeomorfismo con l'immagine (un aperto del toro a cui abbiamo tolto un insieme di misura nulla)

$$\varphi : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow U \subset S^1 \times S^1 \quad (\alpha, \beta) \mapsto ([\alpha], [\beta]).$$

Su U , le curve γ_i diventano dei segmenti aperti (sarebbero le curve originali a cui abbiamo tolto un punto), e inoltre vale che

$$\varphi^* d\theta^1 = dx^1.$$

Parametrizziamo le curve $\tilde{\gamma}_i = \varphi^* \gamma_i$ con

$$\tilde{\gamma}_1 : (-\pi, \pi) \longrightarrow (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \cong U \quad t \longmapsto (0, t),$$

$$\tilde{\gamma}_2 : (-\pi, \pi) \longrightarrow (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \cong U \quad t \longmapsto (t, 0).$$

Dopo aver dato queste parametrizzazioni, andiamo a calcolare

$$\int_{\gamma_1} d\theta^1 = \int_{\tilde{\gamma}_1} \varphi^* d\theta^1 = \int_{\tilde{\gamma}_1} dx^1 = \int_{-\pi}^{\pi} 0 = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} d\theta^1 = \int_{\tilde{\gamma}_2} \varphi^* d\theta^1 = \int_{\tilde{\gamma}_2} dx^1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi.$$

Esercizio 7.3

Sappiamo che per definizione

$$f^*(dx^i)(p)(v) := dx^i(f(p))(df_p(v)).$$

Ma allora

$$f^*(dx^i)(p)(v) = dx^i(f(p))(df_p(v)) = dx^i_{f(p)}(d(f)_p(v)) = d(x^i \circ f)_p(v) = d(f_i)_p(v).$$

Siccome questa relazione vale per ogni $v \in T_p U \cong \mathbb{R}^m$, allora

$$f^*(dx^i) \equiv d(f_i)_p$$

come mappe da $T_p U$ in $T_{f(p)} V$. Ma questo vale per ogni punto $p \in U$, e dunque

$$f^*(dx^i) = df_i$$

come 1-forme su U .

Esercizio 7.4

In generale, sappiamo che

$$(\varphi^* \omega)(p)(v) := \omega(\varphi(p))(d\varphi_p(v)),$$

dove $p \in M$ è un punto e $v \in T_p M$ è un vettore nello spazio tangente a p . Consideriamo prima i casi in cui $\omega = f \in C^\infty(M)$ e poi il caso in cui $\omega = df$. Otteniamo due diagrammi:

- il primo è dato da

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad d \quad} & df \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \\ \varphi^* f = f \circ \varphi & \xrightarrow{\quad d \quad} & d(f \circ \varphi) = df \circ d\varphi \end{array}$$

e commuta in quanto

$$\varphi^*(df)(p)(v) = df(\varphi(p))(d\varphi_p(v)) = df_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)) = df(d\varphi(v)),$$

cioè $\varphi^*(df) \equiv df \circ d\varphi$.

- l'altro è dato da

$$\begin{array}{ccc} df & \xrightarrow{d} & d^2 f = 0 \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \\ \varphi^*(df) = df \circ d\varphi = d(f \circ \varphi) & \xrightarrow{d} & d^2(f \circ \varphi) = 0 \end{array}$$

dove abbiamo già dimostrato che $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$.

Per lavorare su una forma qualsiasi k -forma ω , ci conviene restringerci in carte: così,

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^I,$$

dove con dx^I indichiamo $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Siccome il pullback commuta con la somma, ci basta dimostrare che la tesi è valida quando ω è della forma

$$\omega = f_I dx^I.$$

Abbiamo dunque

$$d\omega = df_I \wedge dx^I,$$

e dall'esercizio 6.5 sappiamo anche che

$$\varphi^*(df_I \wedge dx^I) = \varphi^*(df_I) \wedge \varphi^*(dx^I).$$

Essendo f una funzione, abbiamo già dimostrato la tesi e possiamo quindi sostituire la prima parte, per ottenere

$$d(\varphi^* f_I) \wedge \varphi^*(dx^I).$$

Per concludere

$$d(\varphi^* \omega) = d(\varphi^*(f_I) \varphi^*(dx^I)) = d(\varphi^* f_I) \wedge \varphi^*(dx^I) = \varphi^*(d\omega).$$

Esercizio 8.2

Dimostriamo per induzione su k che

$$b^0(S^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}) = 1 \quad b^1(S^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}) = k - 1 \quad b^2(S^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}) = 0,$$

dove i P_i sono punti distinti.

In realtà l'induzione sarà applicata in maniera un po' diversa: sappiamo che se togliamo un punto ad S^2 , lo spazio ottenuto è diffeomorfo a $\mathbb{R}^2$, e quindi se togliamo k punti allora lo spazio risultante sarà diffeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{k - 1 \text{ punti}\}$. Dimostriamo allora per induzione che $\mathbb{R}^2 \setminus \{k - 1 \text{ punti}\}$ ha quei numeri di betti:

- il caso $k = 1$ è stato visto a lezione (abbiamo studiato la coomologia di $\mathbb{R}^n$ in generale).
- Senza perdita di generalità, possiamo supporre che i nostri $k - 1$ punti siano $\{1, 2, \dots, k - 1\}$. Vogliamo applicare Mayer-Vietoris con i seguenti aperti:

$$U = \left(-\infty, \frac{7}{4}\right) \times (-\infty, +\infty),$$

$$V = \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) \times (-\infty, +\infty),$$

$$U \cap V = \left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) \times (-\infty, +\infty)$$

(ovviamente intendiamo che ad U , V e $U \cap V$ vengano tolti i punti che abbiamo scritto sopra). In particolare, U "contiene il solo punto tolto" 1 (cioè ha un solo buco), mentre V tutti quegli altri (quindi $k-2$ buchi); $U \cap V$ è una striscia lunghissima che però non contiene nessun buco, e in particolare è diffeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Per V possiamo applicare l'ipotesi induttiva, mentre per U possiamo vedere che è diffeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, su cui è definita la 1-forma chiusa non esatta

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

(si può anche applicare l'induzione forte, in quanto $\mathbb{R}^2$ a cui è stato tolto un punto ricade nel caso $k=2$). Appliciamo Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^0(U) \oplus \mathcal{H}^0(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}^0(U \cap V) \\ & & & & \swarrow & & \\ & & \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(U) \oplus \mathcal{H}^1(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(U \cap V) \cong \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) = 0 \end{array}$$

Dal fatto che $\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}$ è connessa, sappiamo che

$$\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}) \cong \mathbb{R},$$

e applicando l'ipotesi induttiva otteniamo

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{k-2} \longrightarrow 0.$$

Si conclude che

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}) = \mathbb{R}^{k-1}$$

grazie all'esercizio 8.1. Per $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\})$ si vede facilmente che

$$\mathcal{H}^1(U \cap V) = 0 \longrightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}) \longrightarrow \mathcal{H}^2(U) \oplus \mathcal{H}^2(V) = 0 \oplus 0 \longrightarrow \mathcal{H}^2(U \cap V) = 0.$$

Quindi

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}) = 0.$$

Tutti gli altri numeri di betti sono nulli in quanto $\mathbb{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ punti}\}$ ha dimensione 2.

Esercizio 8.3

Vogliamo sfruttare degli aperti costruiti in maniera intelligente. Prendiamo $\mathbb{Z}$, e definiamo U e V nel seguente modo:

- per ogni numero pari, quindi della forma $2n$, allora prendiamo una striscia infinita che abbia solo $2n$ come numero reale intero, cioè l'insieme del tipo

$$\left(2n - \frac{3}{4}, 2n + \frac{3}{4}\right) \times (-\infty, +\infty).$$

Definiamo allora U come l'unione di tutte queste striscioline che circondano un numero pari, ovvero

$$U = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(2n - \frac{3}{4}, 2n + \frac{3}{4}\right) \times (-\infty, +\infty).$$

- Allo stesso modo, V è un'unione disgiunta di tante striscioline che circondano i numeri dispari, cioè

$$V = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \left((2n+1) - \frac{3}{4}, (2n+1) + \frac{3}{4}\right) \times (-\infty, +\infty).$$

- L'intersezione tra questi due aperti è un'unione disgiunta di tante striscioline che non circondano nessun intero reale, cioè

$$U \cap V = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}, \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \times (-\infty, +\infty).$$

Restingiamo ovviamente tali aperti al nostro caso, cioè a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, e usiamo il fatto che la coomologia si spezza nel prodotto diretto delle coomologie delle componenti connesse, unito alla successione di Mayer-Vietoris. In particolare

$$\mathcal{H}^1(U \cap V) = 0,$$

in quanto ogni strisciolina di $U \cap V$ è diffeomorfa a $\mathbb{R}^2$, e quindi abbiamo un prodotto diretto (infinito) di zeri. Inoltre (consideriamo solo in caso di U , tanto il caso di V è analogo), vale che

$$\mathcal{H}^1(U) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{punto}\}) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Infatti, su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{punto}\}$, dove possiamo prendere come punto tolto l'origine, esiste la forma chiusa e non esatta

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

Usiamo la successione di Mayer-Vietoris per dire che

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}^0(U \cap V) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \xrightarrow{f} \mathcal{H}^1(U) \oplus \mathcal{H}^1(V) \longrightarrow \mathcal{H}^1(U \cap V) \cong 0.$$

L'unica cosa che ci serve, è che l'esattezza di questa successione ci implica la surgettività di f (il fatto che $\mathcal{H}^0(U \cap V)$ sia infinito dimensionale non ci interessa molto). Si conclude in quanto $\mathcal{H}^1(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ si surgetta su uno spazio infinito dimensionale.

Esercizio 8.6

Definiamo la mappa

$$\mathcal{H}^1(M) \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R}) \quad [\omega] \longmapsto \left([\gamma] \longmapsto \int_{\gamma} \omega \right).$$

La mappa è ben definita:

- la mappa

$$[\gamma] \longmapsto \int_{\gamma} \omega$$

è ben definita, in quanto ω è una forma chiusa e scegliendo un altro rappresentante per $[\gamma]$, il risultato non cambia per invarianza dell'integrale di forme chiuse su curve omotope ad estremi fissi.

- La mappa

$$[\omega] \longmapsto \left([\gamma] \longmapsto \int_{\gamma} \omega \right)$$

è ben definita in quanto, se prendiamo un altro rappresentante per $[\omega]$, cioè $\omega + d\eta$, allora

$$\int_{\gamma} \omega + d\eta = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} d\eta = \int_{\gamma} \omega + \int_{\partial\gamma} \eta = \int_{\gamma} \omega + 0 = \int_{\gamma} \omega,$$

poiché γ è una curva chiusa.

Dimostriamo infine che la mappa è iniettiva: sia $[\omega]$ tale che

$$\int_{\gamma} \omega = 0;$$

vogliamo dimostrare che ω è esatta, cioè che esiste $f \in C^\infty(M)$ tale che $\omega = df$. Costruiamo f come segue: fissiamo un punto $x_0 \in M$, e poniamo

$$f(x) = \int_\gamma \omega,$$

dove γ è un qualsiasi cammino che connette x_0 a x . La buona definizione di f deriva dal fatto che se γ e α sono due curve qualsiasi che connettono x_0 a x , allora $\gamma * \alpha^{-1}$ (dove con α^{-1} intendiamo la curva α percorsa al contrario) è una curva chiusa. Perciò

$$0 = \int_{\gamma * \alpha^{-1}} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{\alpha^{-1}} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\alpha \omega \implies \int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega.$$

Quindi f è ben definita, e soddisfa che $df = \omega$.

Esercizio 9.4

La varietà X è diffeomorfa al prodotto $(T \setminus \{q\}) \times (T \setminus \{p\})$, per cui, utilizzando l'enunciato dell'esercizio 9.1 e la formula di Kunneth, otteniamo che

$$b^0(T \setminus \{p\}) = 1 \quad b^1(T \setminus \{p\}) = 2 \quad b^2(T \setminus \{p\}) = 1 - 1 = 0$$

(la coomologia del toro è stata calcolata a lezione). Perciò

$$b^0(X) = 1 \text{ (torna con il fatto che } X \text{ sia connessa)}$$

$$b^1(X) = b^0(T \setminus \{q\})b^1(T \setminus \{p\}) + b^1(T \setminus \{q\})b^0(T \setminus \{p\}) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$$

$$b^2(X) = b^0(T \setminus \{q\})b^2(T \setminus \{p\}) + b^1(T \setminus \{q\})b^1(T \setminus \{p\}) + b^2(T \setminus \{q\})b^0(T \setminus \{p\}) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0 + 4 + 0 = 4$$

$$b^3(X) = b^1(T \setminus \{q\})b^2(T \setminus \{p\}) + b^2(T \setminus \{q\})b^1(T \setminus \{p\}) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0$$

$$b^4(X) = b^2(T \setminus \{q\})b^2(T \setminus \{p\}) = 0 \cdot 0 = 0$$

Esercizio 9.5

Richiamiamo la definizione di $\chi(M)$, cioè che

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b^i(M),$$

dove M è una varietà di dimensione m . Nelle ipotesi in cui siamo, vale la formula di Kunneth, ovvero che

$$b^k(M \times N) = \sum_{i+j=k} b^i(M)b^j(N).$$

Siano quindi M e N varietà di dimensione rispettivamente m e n , e vediamo che

$$\chi(M \times N) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k b^k(M \times N) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \sum_{i=0}^k b^i(M)b^{k-i}(N) = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i=0}^k (-1)^i b^i(M)(-1)^{k-i} b^{k-i}(N).$$

Riordiniamo gli indici e otteniamo che

$$\chi(M \times N) = \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=i}^{n+m} (-1)^i b^i(M)(-1)^{k-i} b^{k-i}(N) = \sum_{i=0}^{n+m} (-1)^i b^i(M) \sum_{k=i}^{n+m} (-1)^{k-i} b^{k-i}(N).$$

Siccome M ha dimensione m , allora $b^i(M) = 0$ per ogni $i > m$, quindi possiamo scrivere

$$\chi(M \times N) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b^i(M) \sum_{k=i}^{n+m} (-1)^{k-i} b^{k-i}(N) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b^i(M) \sum_{j=0}^{n+m-i} (-1)^j b^j(N).$$

Applicando lo stesso ragionamento che abbiamo fatto per M , allora $b^j(N) = 0$ per ogni $j > n$. All'interno della seconda sommatoria, possiamo quindi escludere tutti gli indici maggiori di n (ed essendo i al più m , allora la sommatoria sarà esattamente da 0 a n , cioè riusciamo a prendere tutti gli indici). Perciò otteniamo

$$\chi(M \times N) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b^i(M) \sum_{j=0}^n (-1)^j b^j(N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 9.7

Fissiamo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V , e vogliamo vedere che v è univocamente determinato dai coefficienti

$$\alpha_i = \beta(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n),$$

cioè che

$$v = \frac{1}{\alpha(v_1, \dots, v_n)} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \alpha_i v_i.$$

Vediamo prima che v soddisfa la richiesta $\iota_v(\alpha) = \beta$, e poi vediamo che è unico:

- Notiamo che β è completamente determinato dagli α_i (questo deriva dal fatto che l'insieme $\mathcal{D} = \{v^1 \wedge \dots \wedge \hat{v}^i \wedge \dots \wedge v^n\}_{i=1, \dots, n}$ è una base di $\Lambda^{n-1}(V)$). Quindi, valutando $\iota_v(\alpha)$ in $(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \iota_v(\alpha)(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n) &= \alpha(v, v_1, \dots, v_n) = \\ &= \alpha \left(\frac{1}{\alpha(v_1, \dots, v_n)} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \alpha_j v_j, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \right). \end{aligned}$$

Per multilinearità (o meglio, per linearità della prima entrata) otteniamo

$$= \frac{1}{\alpha(v_1, \dots, v_n)} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \alpha_j \alpha(v_j, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n) =$$

e per alternanza

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\alpha(v_1, \dots, v_n)} (-1)^{i+1} \alpha_i \alpha(v_i, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n) = \frac{1}{\alpha(v_1, \dots, v_n)} (-1)^{i+1} \alpha_i (-1)^{i-1} \alpha(v_1, \dots, v_n) = \\ &= (-1)^{2i} \alpha_i = \alpha_i = \beta(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Siccome $\iota_v(\alpha)$ e β coincidono sull'insieme $\{(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)\}_{i=1, \dots, n}$, allora sono la stessa mappa (la loro scrittura rispetto alla base $\mathcal{D}$ è la stessa).

- Sia ora w un altro vettore per cui $\iota_w(\alpha) = \beta$, e supponiamo per assurdo che w sia diverso da v , ovvero che esista un indice i per cui la sua scrittura rispetto a $\mathcal{B}$ ha un indice

$$\gamma_i \neq \frac{1}{\alpha(v_1, \dots, v_n)} (-1)^{i+1} \alpha_i.$$

Andando a valutare

$$\iota_w(\alpha)(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n),$$

otteniamo (facendo gli stessi identici conti di prima) che

$$\iota_w(\alpha)(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n) = (-1)^{i-1} \alpha(v_1, \dots, v_n) \gamma_i \neq \alpha_i = \beta(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n),$$

per cui

$$\iota_w(\alpha) \neq \beta.$$

Assurdo.

5.4 Quarta consegna

Esercizio 10.1

Verifichiamo che le due mappe sono isometrie:

- Consideriamo la mappa

$$f : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n \quad x \longmapsto x + b \quad \text{con } b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0).$$

Se indichiamo con g il tensore metrico iperbolico, vogliamo vedere che

$$f_*g = g = \frac{1}{x_n^2}g^E, \quad \text{con } g^E \text{ tensore metrico euclideo.}$$

Osserviamo innanzi tutto che

$$df_x = Id$$

per ogni $x \in \mathbb{H}^n$ (stiamo identificando canonicamente i tangenti di $\mathbb{H}^n$ come $\mathbb{R}^n$, e quindi posso parlare di identità anche tra spazi tangenti di punti diversi), perciò, dati $v, w \in T_x\mathbb{H}^n$, allora

$$f_*g(x)(v, w) = g(f^{-1}(x)) \left(df_{f^{-1}(x)}^{-1}(v), df_{f^{-1}(x)}^{-1}(w) \right) = g(x - b) \left(df_{f^{-1}(x)}^{-1}(v), df_{f^{-1}(x)}^{-1}(w) \right);$$

poiché x e $x - b$ hanno la stessa coordinata n -esima, allora vale che

$$f_*g(x)(v, w) = g(x) \left(df_{f^{-1}(x)}^{-1}(v), df_{f^{-1}(x)}^{-1}(w) \right).$$

Riscrivendola leggermente meglio, otteniamo

$$g(v, w) = f_*g(df_x(v), df_x(w)) = f_*g(v, w),$$

per cui f è un'isometria (possiamo lasciar perdere la notazione con il differenziale: per quanto detto prima, i tangenti sono canonicamente identificati e il differenziale di f è l'identità).

- Sia

$$h : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n \quad x \longmapsto \lambda x \quad \text{con } \lambda > 0.$$

Come prima, scriviamo

$$\begin{aligned} h_*g(x)(v, w) &= g(h^{-1}(x)) \left(dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(v), dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(w) \right) = \\ &= g\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \left(dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(v), dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(w) \right). \end{aligned}$$

Ora, osserviamo che

$$\frac{1}{\lambda}x = \left(\frac{1}{\lambda}x_1, \dots, \frac{1}{\lambda}x_n \right),$$

per cui il tensore metrico iperbolico si modifica nel seguente modo:

$$g\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = \frac{\lambda^2}{x_n^2}g^E \implies h_*g(x)(v, w) = \lambda^2 g(x) \left(dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(v), dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(w) \right).$$

Concludiamo notando che

$$dh_x = \lambda Id \quad \forall x \in \mathbb{H}^n,$$

per cui

$$dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda}v,$$

e perciò

$$\lambda^2 g(x) \left(dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(v), dh_{h^{-1}(x)}^{-1}(w) \right) = \lambda^2 g(x) \left(\frac{1}{\lambda}v, \frac{1}{\lambda}w \right) = \lambda^2 \frac{1}{\lambda^2} g(x)(v, w) = g(x)(v, w).$$

Vediamo che con questi due risultati riusciamo a dimostrare che, dati due punti p e q in $\mathbb{H}^n$, si riesce sempre a trovare un'isometria che porta il primo nel secondo. Per farlo, consideriamo p_n e q_n (le n -esime coordinate dei due punti) e consideriamo

$$\lambda := \frac{q_n}{p_n} > 0.$$

Abbiamo visto che l'omotetia per λ è un'isometria di $\mathbb{H}^n$, che porta p in $p' = \lambda p$. Siccome p' e q hanno la stessa n -esima coordinata, ci basta traslare p' in q con un vettore b , che per quanto detto fino ad ora sarà un vettore che ha ultima componente nulla. Come visto prima, tale mappa è un'isometria; componendo queste due isometrie otteniamo l'isometria desiderata.

Esercizio 10.2

La forma volume indotta è quella data da

$$\omega = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy.$$

Perciò l'integrale diventa

$$\int_{-a}^a \int_b^{+\infty} \omega = \int_{-a}^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{y^2} dx \wedge dy = \int_{-a}^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \frac{2a}{b}.$$

Esercizio 10.7

Consideriamo $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie associata a G , e fissiamo una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathfrak{g}$. Consideriamo quindi il prodotto scalare definito positivo per cui tale base risulta essere una base ortonormale. Vorremmo estendere tale scelta ad un tensore metrico definito positivo. Su un generico tangente $T_h G$, possiamo definire, dati $v, w \in T_h G$, $g(p)$ come

$$g(p)(v, w) = g(e) (d(L_h^{-1})_h(v), d(L_h^{-1})_h(w)),$$

dove $g(e)$ è il prodotto scalare che abbiamo definito inizialmente. Con questa definizione, il tensore metrico g è definito positivo in ogni punto (infatti i differenziali sono isomorfismi di spazi vettoriali, e il prodotto scalare iniziale è definito positivo). Inoltre, le moltiplicazioni a sinistra sono isometrie per costruzione.

Esercizio 11.1

Estendiamo v all'unico campo X parallelo lungo γ per cui $X(0) = v$. Cerchiamo di descrivere esplicitamente X : sappiamo che deve risolvere il problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\dot{\gamma}^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k \\ X(0) = v \end{cases}.$$

Ricordiamo che i simboli di Christoffel per il piano iperbolico sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{y} \quad \text{e} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}.$$

Osserviamo che, siccome $\gamma(t)$ ha la seconda coordinata costante nel tempo (è sempre 1), allora i simboli di Christoffel si semplificano (sono costanti, e quelli non nulli valgono 1 o -1). Per comodità scriviamo

$$X(t) = (x(t), y(t)),$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

La soluzione a tale sistema è

$$X(t) = (\sin(t), \cos(t)),$$

per cui l'angolo formato con l'asse delle ordinate all'istante t è proprio t .

Esercizio 11.2

Prendiamo l'isomorfismo

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)).$$

Sapendo che

$$d\Phi_{(\rho, \theta)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

andiamo a calcolare

$$\Phi^* g(\rho, \theta)(v, w) = g(\Phi(\rho, \theta)) (d\Phi_{(\rho, \theta)}(v), d\Phi_{(\rho, \theta)}(w)),$$

dove ricordiamo che in realtà g è costante e non dipende da $\Phi(\rho, \theta)$. In particolare, ci conviene lavorare in coordinate (dalle dal considerare la base canonica), ovvero

$$\Phi^* g(\rho, \theta)(e_1, e_1) = 1,$$

$$\Phi^* g(\rho, \theta)(e_1, e_2) = 0,$$

$$\Phi^* g(\rho, \theta)(e_2, e_2) = \rho^2,$$

$$\Phi^* g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita, ci basta usare la formula che la caratterizza, ovvero

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

dove ricordiamo che la matrice g^{kl} è l'inversa della matrice g_{kl} . Dopo un sacco di conti otteniamo

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\rho \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho}.$$

Esercizio 11.4

La non simmetria è ovvia in quanto i simboli di Christoffel non lo sono. La compatibilità è data dal fatto che

$$(\nabla_v g)_{jk} = v^i \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - g_{lk} \Gamma_{ij}^l - g_{jl} \Gamma_{ik}^l \right),$$

ma per il tensore metrico euclideo abbiamo

$$g_{lk} = \delta_{lk},$$

quindi (considerando solo il pezzo all'interno delle parentesi)

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0 \quad \text{in quanto il tensore euclideo è costante}$$

$$g_{lk}\Gamma_{ij}^l + g_{jl}\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ik}^j = 0 \quad \text{per calcolo diretto.}$$

Abbiamo quindi dimostrato che entrambi i membri sono nulli, e quindi

$$\nabla_v g = 0$$

indipendentemente dal vettore considerato.

Guardiamo le geodetiche: sappiamo che esse soddisfano l'equazione

$$\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k e_k = 0.$$

Ma adesso, concentrandoci su

$$\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k,$$

osserviamo che la prima parte è simmetrica (invertendo i e j), mentre i simboli di Christoffel sono antisimmetrici; quindi si annulla. Rimane solo

$$\ddot{\gamma} = 0,$$

ovvero le geodetiche sono rette.

Esercizio 12.3

Dall'omogeneità di M , vediamo che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\exp_p$ è un diffeomorfismo quando definita su

$$B(0, \varepsilon) \subset T_p M \quad \forall p \in M.$$

Infatti, sappiamo che, fissato $p \in M$, allora per il teorema di invertibilità locale tale ε esiste. Preso un altro punto $q \in M$ qualsiasi, sappiamo che esiste f isometria di M che porta p in q : in particolare, il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \exp_p \uparrow & & \uparrow \exp_q \\ B(0, \varepsilon) \subset T_p M & \xrightarrow{df_p} & B(0, \varepsilon) \subset T_q M \end{array}$$

Quindi, se ho una geodetica definita su un intervallo $[a, b]$, allora posso prolungare l'intervallo di definizione della geodetica a $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Esercizio 12.5

Vediamo che, nelle ipotesi in cui siamo, possiamo proiettare e sollevare geodetiche tra M e N tramite f :

- se ho una geodetica γ su N , allora prendo $p \in \gamma$ (nell'immagine di γ) e considero il sollevamento tramite f . So che esiste una palla centrata in p (che chiamo B) ben rivestita, cioè

$$f^{-1}(B) = \bigsqcup_{\alpha} B_{\alpha},$$

e a meno di restringere ulteriormente posso supporre che f sia un'isometria sulle B_{α} . Allora la preimmagine di γ è localmente una geodetica (preimmagine di una geodetica tramite un'isometria), ma possiamo applicare questo ragionamento al variare di $p \in \gamma$.

- Se ho una geodetica $\tilde{\gamma}$ su M , allora consideriamo la proiezione

$$\gamma = f \circ \tilde{\gamma}.$$

Siccome f è isometria locale, allora, dato un punto p in $\tilde{\gamma}$, esiste un intorno di p su cui f è un'isometria con l'immagine. Si conclude in quanto, per ogni punto in γ , allora γ coincide localmente con una geodetica.

Usiamo questo fatto per vedere che

- se ho una geodetica su γ e suppongo M completa, il sollevamento tramite f può essere prolungato indefinitamente, e proiettando di nuovo abbiamo prolungato anche γ . Quindi dalla completezza di M si deduce la completezza di N .
- Data una geodetica $\tilde{\gamma}$ su M , proietto e trovo una geodetica su N . Supponendo N completa, allora posso prolungare tale geodetica indefinitamente su N , e sollevando quest'ultima sono riuscito a prolungare $\tilde{\gamma}$. Quindi dalla completezza di N si trova la completezza di M .

Esercizio 12.9

La varietà è un aperto di $\mathbb{R}^2$, ed è quindi localmente isometrico ad esso. Sappiamo a priori che questo ci dice che il tensore di Riemann è identicamente nullo. Se volessimo andare comunque a calcolarlo, usando la formula

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m$$

e la simmetria

$$R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l = 0$$

troveremmo che

$$R_{111}^1 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$R_{112}^1 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$R_{121}^1 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

da cui

$$R_{211}^1 = -(R_{112}^1 + R_{121}^1) = 0,$$

poi

$$R_{122}^1 = -1 - 0 + 0 + 1 = 0$$

$$R_{221}^1 = 0 - 0 - 1 + 1 = 0$$

da cui

$$R_{212}^1 = -(R_{122}^1 + R_{221}^1) = 0,$$

e infine

$$R_{222}^1 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0.$$

Per gli altri si fa la stessa cosa:

$$R_{222}^2 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$R_{122}^2 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$R_{221}^2 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

da cui

$$R_{212}^2 = -(R_{122}^2 + R_{221}^2) = 0,$$

poi

$$R_{211}^2 = 0 + \frac{1}{\rho^2} + 0 - \frac{1}{\rho^2} = 0$$

$$R_{112}^2 = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} = 0$$

da cui

$$R_{211}^2 = -(R_{212}^2 + R_{112}^2) = 0,$$

e infine

$$R_{111}^2 = 0 - 0 + 0 - 0 = 0.$$

Un conto un po' suicida.